トポロジー 演習・レポート問題3（2012年10月22日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（10/29の講義開始前までに提出してください）

$f:\mathbb{R}^n\to\{\mathbf{0}\}$ と $g:\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R}^n$ を，それぞれ $f(\boldsymbol{x}):=\mathbf{0}$, $g(\mathbf{0}):=\mathbf{0}$ で定義する．明らかに $f\circ g=\mathrm{id}_{\{\mathbf{0}\}}$ である．

(1) $g\circ f$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ の間のホモトピー $F:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}^n$ で $F(\mathbf{0},t)=\mathbf{0}$ $(\forall t\in I)$ であるものを構成し，$\mathbb{R}^n\simeq\{\mathbf{0}\}$ を示せ．

(2) $\mathbf{0}$ への定値写像 $c:I\to\mathbb{R}^n$, $c(t):=\mathbf{0}$ もループとみなす．任意のループ $\gamma:(I,\partial I)\to(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})$ は

$$\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}^n,\quad \tilde{F}(t,s):=F(\gamma(t),s)$$

により $\gamma\simeq c\ \mathrm{rel}\ \mathbf{0}$ となることを示せ．ただし F は(1)で作ったものである．

(3) $\pi_1(\mathbb{R}^n,\mathbf{0})=\{[c]\}$（ただ一つの元 $[c]$ からなる集合）であることを示せ．

【演習問題】 c は基点 x_0 への定値写像 $c:I\to\{x_0\}$ を表すものとする．

1. 「基点を止めてホモトピック」という関係 “$f\simeq g\ \mathrm{rel}\ x_0$” は同値関係であること（補題3.4）を確かめよ.（ヒント：補題2.3と同様）

2. ループ $f:(I,\partial I)\to(X,x_0)$ は，連続写像 $\hat{f}:S^1\to X$ で $\hat{f}(1,0)=x_0$ をみたすものとも思えることを示せ．

3. $\mathbb{R}^2$ から二点を除いた空間 $Y:=\mathbb{R}^2\setminus\{(\pm1,0)\}$ を考える．二つのループ $f,g:(I,\partial I)\to(Y,\mathbf{0})$,

$$f(t):=(1+\cos(2\pi t+\pi),\sin(2\pi t+\pi)),\quad g(t):=(-1+\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$$

   に対し，$[f][g]$, $[g][f]\in\pi_1(Y,\mathbf{0})$ を表すループをそれぞれ図示せよ．

4. (1) $X:=\{(t,-2t)\in\mathbb{R}^2\mid -1\le t\le 1\}\cup\{(t,2t)\in\mathbb{R}^2\mid -1\le t\le 1\}$ を図示せよ．
   (2) X は可縮であることを示せ.（ヒント：$\mathbf{0}\in X$ に「つぶす」とよい）
   (3) $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ を X の基点とする．$\pi_1(X,\mathbf{0})=\{[c]\}$ を示せ.（ヒント：レポート(3)と同様）

5. (1) $\mathbb{O}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x^2+y^2\le 9\}$ を図示せよ．
   (2) $O:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=4\}$ を図示せよ．また包含写像 $i:O\to\mathbb{O}$ はホモトピー同値写像であることを示せ.（ヒント：講義の例2.8と同様）
   (3) $x_0:=(2,0)\in O$ を $\mathbb{O}$ の基点とし，O を表すループ $f:(I,\partial I)\to(\mathbb{O},x_0)$ を

$$f(t):=2(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$$

   で定義する．$[f]\neq[c]\in\pi_1(\mathbb{O},x_0)$ か？

後日略解を掲載します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html