トポロジー 演習・レポート問題3（2012年10月22日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) $g \circ f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ だから，例えば $F(\boldsymbol{x}, t) := t\boldsymbol{x}$ が求めるものである．確かに $F(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$.

(2) $\tilde{F}(t, 0) = \mathbf{0} = c(t)$, $\tilde{F}(t, 1) = \gamma(t)$ はすぐにわかる．$F(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ $(\forall t \in I)$ となるよう作ったから，$\tilde{F}(0, s) = F(\gamma(0), s) = F(\mathbf{0}, s) = \mathbf{0}$, 同様に $\tilde{F}(1, s) = \mathbf{0}$. よって $\tilde{F}$ は γ と c の間の基点を止めたホモトピーである．

(3) (2) より，任意の $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, $\gamma : (I, \partial I) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ に対し $[\gamma] = [c]$ となる．

【演習問題】

1. 補題 2.3 の証明と同様．途中でいろいろなホモトピーをつくるとき，それが基点を保つようにしていけばよい．

2. $S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$ であることに注意する．講義でやった意味でのループ $f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ が与えられたとするとき，$\hat{f} : S^1 \to X$ を
$$\hat{f}(\cos\theta, \sin\theta) := f(\theta/2\pi)$$
とおけば，$f(0) = f(1)$ であることから $\hat{f}$ は well-defined, 連続で $\hat{f}(1, 0) = f(0) = x_0$. 逆に連続写像 $\hat{f} : S^1 \to X$, $\hat{f}(1, 0) = x_0$ が与えられたとき，$f : I \to X$ を
$$f(t) := \hat{f}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$
とおけば，$f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ であることは明らかだろう．

3. $f * g$ と $g * f$ を描けばよいが，$\pi_1(Y, \mathbf{0})$ の元として同じものを表せばよいから，基点を止めてホモトピーで変形したものは全て正解．図1では変形したものを描き，違いをわかりやすくしておいた．どちらも原点から出発し，反時計回りに回って原点に戻る．

4. (1) 図2参照.

   (2) $f : X \to \{\mathbf{0}\}$, $g : \{\mathbf{0}\} \to X$ をレポート問題と全く同じ式で定義すると $f \circ g = \mathrm{id}_{\{\mathbf{0}\}}$, レポート問題と全く同じ式で定義される $F : X \times I \to X$ によって $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ がわかる．

   (3) (2) の F は $F(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ $(\forall t \in I)$ をみたすから，レポート問題 (2) と全く同様に，任意のループ $\gamma : (I, \partial I) \to (X, \mathbf{0})$ に対し $\gamma \simeq c \text{ rel } \mathbf{0}$ がわかる．

5. (1) 図2参照.

   (2) 例えば $p : \mathbb{O} \to O$ を $p(\boldsymbol{x}) := 2\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ で定義すると，後は例 2.8 と全く同様.

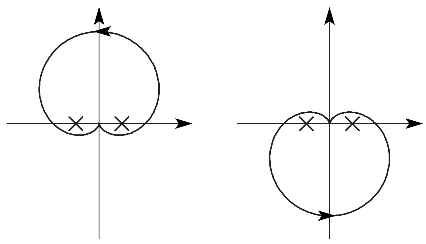

図 1: $[f][g]$ と $[g][f]$. $\times$ は除かれた二点 $(\pm 1, 0)$.

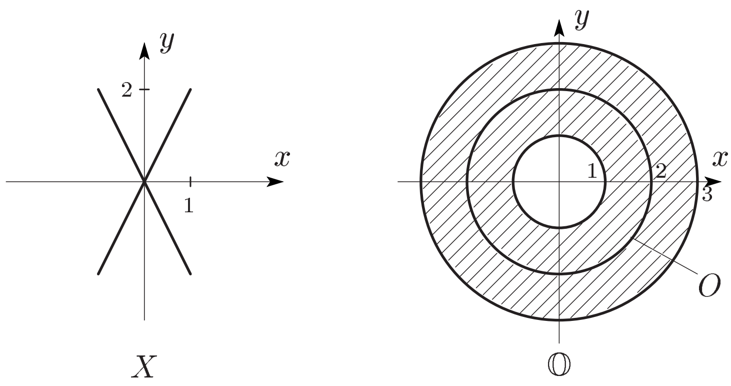

図 2: X と $\mathbb{O}$

(3) $[f] \neq [c]$ である．背理法で，f と c の間のホモトピー (rel x_0) が存在すると仮定して矛盾を導くことができるが省略．正確な証明は今後の講義で明らかになるが，大雑把に言えば $\mathbb{O}$ の内側の穴のために O は一点に縮まない，というのが理由．

注．演習問題 5 の f を，問題 2 のように $f : S^1 \to O$, $f(1,0) = x_0$ とみなすと，これは本質的に $O \approx S^1$ の恒等写像である．5 の (3) でみたように，これは定値写像とホモトピックではない．

このように，一般に恒等写像と定値写像はホモトピックではない．