トポロジー 演習・レポート問題 4（2012 年 10 月 29 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（11/5 の講義開始前までに提出してください）
二つの空間 $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ と $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$ を考え，どちらも基点として原点 $\mathbf{0}$ を取る．また $i : X \to Y$ を包含写像とする．

(1) X のループ

$$f(t) = (1+\cos(2\pi t+\pi)), \sin(2\pi t+\pi)), \quad g(t) := (-1+\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

を図示せよ．

(2) $i_*[f] = 1 \in \pi_1(Y,\mathbf{0})$（定値ループ $c : I \to \{\mathbf{0}\}$ の同値類）であることを示せ．

【演習問題】

1. 補題 4.1 のホモトピー F によって，実際に $(f*g)*h \simeq f*(g*h) \text{ rel } x_0$ となっていることを確かめよ．同様に，補題 4.2, 4.3, 4.5, 4.6, 定理 3.8' で省略したことを全て確かめよ．

2. 単位円周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の基点を $x_0 := (1,0)$ とする．整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$r_k : (I, \partial I) \to (S^1, x_0)$ を $r_k(t) := (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$ で定義する．

   (1) $\alpha : I \to \mathbb{R}$ を，$0 \le t \le \frac{1}{2}$ のとき $\alpha(t) := 4\pi kt$, $\frac{1}{2} \le t \le 1$ のとき $\alpha(t) := 2\pi l(2t-1) + 2\pi k$ とおく．t の関数 $\alpha(t)$ のグラフを描け．また $(r_k * r_l)(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$ を示せ．

   (2) t の関数 $\beta(t) := 2\pi(k+l)t$ のグラフを描け．ホモトピー $F : I \times I \to S^1$,

   $$F(t,s) := \big(\cos((1-s)\alpha(t) + s\beta(t)), \sin((1-s)\alpha(t) + s\beta(t))\big)$$

   により $r_k * r_l \simeq r_{k+l} \text{ rel } x_0$, 従って $[r_k][r_l] = [r_{k+l}] \in \pi_1(S^1, x_0)$ となることを示せ．

3. 以下のように全射準同型 $p : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ を構成せよ（実は p は同型である）．

   (1) 任意のループ $f : (I, \partial I) \to (S^1, x_0)$ に対し，連続写像 $\theta : I \to \mathbb{R}$ と整数 k で

   $$f(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 2\pi k$$

   となるものが存在することに注意する．$f \simeq r_k \text{ rel } x_0$ となることを示せ．ただし r_k は問題 2. のもの.（ヒント：問題 2. (2) の F を参考にせよ）

   (2) (1) を使って，$p : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$, $p(k) := [r_k]$ は全射であることを示せ．

   (3) 問題 2. (2) を使って，p は準同型であることを示せ．

4. (X, x_0) は基点を止めて可縮，つまり包含写像 $i : \{x_0\} \to X$ と定値写像 $c : X \to \{x_0\}$ に対し，$i \circ c$ と id_X の間のホモトピー $F : X \times I \to X$ で

   $$F(x,0) = i(c(t)) = x_0, \quad F(x,1) = \mathrm{id}_X(x) = x, \quad F(x_0,t) = x_0 \quad (\forall t \in I)$$

   をみたすものが存在するとする（このとき $\{x_0\}$ は X の**変位レトラクト**であるという）．10/22 のレポート問題を参考にして $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ を示せ．

後日略解を掲載します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html