トポロジー 演習・レポート問題 4（2012 年 10 月 29 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(2) $F : I \times I \to Y$ を $F(t,s) := (1-s)i \circ f(t)$ で定義すると，F は $i \circ f$ と原点への定値写像 c との間の基点を止めたホモトピーである（$i \circ f(t) = f(t)$ だから，$F(t,s) = (1-s)f(t)$ と書いても同じ）．

注意. ホモトピー F は図 1 のように $i \circ f$ を原点に向かって「縮めていく」変形である．$F(\pi, \frac{1}{2}) = (1,0) \notin X$ だから，同じ式で $F : I \times I \to X$ を定義することはできず，従って $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ については何も述べていないことに注意せよ（事実としては $[f] \neq 1 \in \pi_1(X, x_0)$ である）．

【演習問題】

1. 略.

2. 問題文の通りに確かめていくのは難しくないはずなので略．図 2 には $0 < k < l$ の場合のグラフを描いた．(2) のホモトピー F は，折れ線 α を β に向かって「だんだんまっすぐにしていく」という変形である.

3. (1) $F(t,s) := \bigl(\cos((1-s)\theta(t) + s \cdot 2\pi kt), \sin((1-s)\theta(t) + s \cdot 2\pi kt)\bigr)$ は f と r_k の間の基点を止めたホモトピーである.

   (2) $\forall [f] \in \pi_1(S^1, x_0)$ に対し，(1) より，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $[f] = [r_k]$．よって $p(k) = [r_k] = [f]$ だから p は全射.

   (3) 問題 2. (2) は $p(k+l) = p(k)p(l)$ であると述べている.

4. $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対し，$\tilde{F}(t,s) := F(f(t), s)$ とおくと $\tilde{F}$ は f と c の間の基点を止めたホモトピー．よって $[f] = 1$, 従って $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

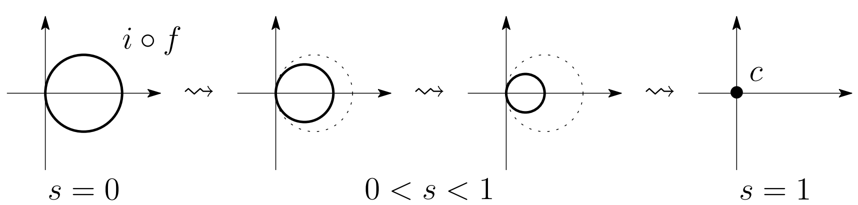

図 1: ホモトピー F

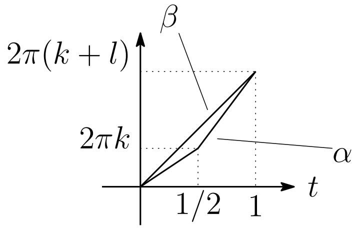

図 2: $0 < k < l$ のときの α, β