トポロジー 演習・レポート問題 5（2012 年 11 月 5 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（11/12 の講義開始前までに提出してください）

n 単体 $\sigma^n := |v_0 \dots v_n|$ を考える．

(1) σ^2 内のループ $\eta_2 := \overrightarrow{v_0v_1v_2v_0}$ を図示せよ．また $\eta_2 \sim \overrightarrow{v_0v_0}$（定値ループ）を示せ．

(2) σ^3 内のループ $\eta_3 := \overrightarrow{v_0v_1v_2v_3v_0}$ を図示せよ．また $\eta_3 \sim \overrightarrow{v_0v_0}$ を示せ．

【演習問題】

1. 単体複体上の二つの path の同値 “$\sim$” が同値関係となっていることを確かめよ．

2. $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の点 $v_0 := (1,0,\dots,0)$, $v_1 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $v_n = (0,\dots,0,1)$ を考える．
   (1) $v_0,\dots,v_n$ は一般の位置にある，つまり $\overrightarrow{v_0v_1},\dots,\overrightarrow{v_0v_n}$ は一次独立であることを示せ．
   (2) $\Delta^n := |v_0 \dots v_n|$ を**標準 n 単体**とよぶ．$n = 0,1,2$ に対し，$\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を図示せよ．
   (3) Δ^n の k-面単体 $|v_{i_0} \dots v_{i_k}|$ $(0 \le i_0 < i_1 < \dots < i_k \le n)$ はいくつあるか．

3. (1) 任意の n 単体（を位相空間とみなしたもの）は全て同相であることを示せ．
   (2) 任意の n 単体は可縮であることを示せ．

4. 2 単体 $\sigma := |v_0v_1v_2|$ の 0-面単体 $|v_i|$ $(i = 0,1,2)$ と 1-面単体 $|v_iv_j|$ $(0 \le i < j \le 2)$ を集めてできる単体複体を K とする．S^1 の単体分割 $f : |K| \xrightarrow{\approx} S^1$ を構成せよ．

5. 有限個の 0 単体と 1 単体のみからなる単体複体を**グラフ** (graph) と呼ぶ．
   (1) 次のようなグラフ T を考える：0 単体は $|v_i|$ $(0 \le i \le 5)$, 1 単体は $|v_0v_i|$ $(1 \le i \le 4)$ と $|v_4v_5|$. T を図示せよ．各頂点（0 単体）v_i $(1 \le i \le 5)$ に対し，v_0 から v_i に至る path は同値を除いてただ一つ定まることを示せ.（このようなグラフを**樹木** (tree) と呼ぶ）
   (2) T に 1 単体 $|v_5v_1|$ を付け加えたグラフを G とする．G を図示せよ．G の path で v_0 と v_5 を結ぶものは同値を除いてただ一つに定まるか？

6. (1) 3 単体 $\sigma := |v_0 \dots v_3|$ の 0-面単体と 1-面単体を集めてできる単体複体 $\sigma^{(1)}$ を図示せよ．
   (2) $\sigma^{(1)}$ を位相空間とみなした $\left|\sigma^{(1)}\right|$ は，三つの S^1 を一点で貼り合わせたもの（S^1 の**ブーケ** (bouquet) と呼び $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ と書く）とホモトピー同値であることを示せ．

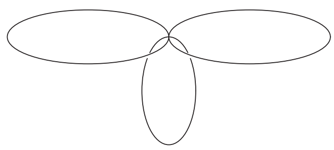

図 1: $S^1 \vee S^1 \vee S^1$. 三つの S^1 の共通部分は一点である．

後日略解を掲載します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html