トポロジー 演習・レポート問題 5（2012 年 11 月 5 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) $\sigma^{(2)}$ があるから，2-同値により $\eta_2 \sim \overrightarrow{v_0 v_1 v_0}$. 簡約により $\eta_2 \sim \overrightarrow{v_0 v_0}$.

(2) 2 単体 $|v_2 v_3 v_0|$ があるから $\eta_3 \sim \overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0}$. 後は $|v_0 v_1 v_2|$ の中で考えれば (1) と同様.

【演習問題】

2. (1) $\displaystyle\sum_{1\le i\le n} a_i \overrightarrow{v_0 v_i} = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となることを示せばよい.
   (2) 図 1 の通り.
   (3) $(n+1)$ 個の頂点から $(k+1)$ 個選ぶごとに k-面単体が一つ定まる．従って $\dbinom{n+1}{k+1}$ 個.

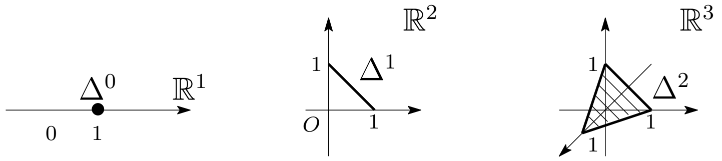

図 1: 標準単体

3. (1) 任意の n 単体 $\sigma = |w_0 \ldots w_n|$ は，前問の標準 n 単体 Δ^n と同相である．同相写像 $f : |\sigma| \to |\Delta^n|$ としては $f\Big(\displaystyle\sum_{0\le i\le n} a_i w_i\Big) := \sum_{0\le i\le n} a_i v_i$（$v_i$ は前問のもの）がある.
   (2) 例えば一つの頂点 w_0 に「つぶせば」よい．$\mathbb{R}^n$ や円板の場合と同様.

4. $\mathbb{R}^2$ の中で，K の「内側」に原点がくるようにし，K の「外側」に S^1 をおく．任意の $x \in |K|$ に対し，原点を端とし x を通る半直線は S^1 とちょうど一回交わるので，その点を $f(x)$ とおけば，$f : |K| \to S^1$ が定義される（図 2 参照）．この f が同相写像であることを確かめよ.

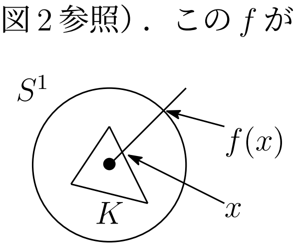

図 2: S^1 の単体分割

5. (1) T と G は図 3 の通り．path の一意性は，例えば path の長さに注目すればよい．つまり，v_0 から v_1 に至る長さ 1 の path は $\overrightarrow{v_0v_1}$ のみであり，長さ 2 以上の path は必ず「往復」$\overrightarrow{v_0v_2v_0}$ 等を含むから，簡約を繰り返して長さを減らせる．他も同様.

(2) $\overrightarrow{v_0v_1v_5}$ と $\overrightarrow{v_0v_4v_5}$ は同値でない．例えば次のように証明できる．この二つが同値だとすると，ループ $\overrightarrow{v_0v_1v_5v_4v_0}$ が $\pi_1(G, v_0)$ の単位元（定値ループで代表される元）を表すことがわかる．しかし 11/12 の講義でやった定理 6.2 と同様にすると $\pi_1(G, v_0) \cong \mathbb{Z}$ がわかり，このループは $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ に対応するから矛盾.

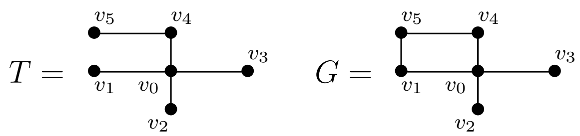

図 3: グラフ T, G

6. $\sigma^{(1)}$ は図 4 の通り．四面体の頂点と辺だが，図のように平面上に描くことができる．

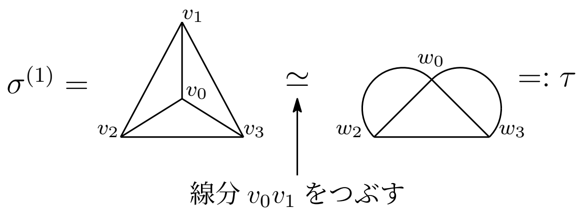

図 4: $\sigma^{(1)}$

$\sigma^{(1)} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$ を示す上で重要なステップは，図 4 に示した通り，$\sigma^{(1)}$ の辺 $|v_0v_1|$ を「つぶした」図形（τ とおく）について，$\sigma^{(1)} \simeq \tau$ となることである．同様のことを $|v_0v_2|$, $|v_0v_3|$ にも繰り返せば $\sigma^{(1)} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$ がわかる．図 5 を参照のこと．

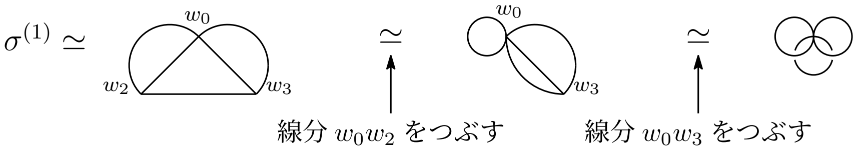

図 5: $\sigma^{(1)} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$

ホモトピー同値 $\sigma^{(1)} \simeq \tau$ はホモトピーの考え方の基本であり重要なポイントだが，講義で十分に説明できていないと思われるので，少し詳しく述べておく．本質的には，図 6 のように三角形の一辺を「つぶす」写像

- 辺 $|v_0v_1|$：一点 w_1 にうつす
- 辺 $|v_1v_2|$ 上の点 $(1-t)v_1 + tv_2$：線分 $|w_1w_2|$ 上の点 $(1-t)w_1 + tw_2$ にうつす
- 辺 $|v_2v_0|$ 上の点 $(1-t)v_2 + tv_0$：円弧 $\overset{\frown}{w_2w_1}$ 上の点 $(1-t)w_2 + tw_1$ にうつす

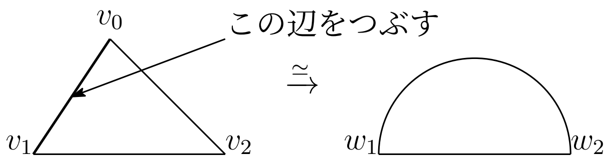

図 6:

がホモトピー同値写像であることがわかればよい．さらに，図 6 の二つの図形は共に S^1 と同相だから，S^1 の「左側三分の一をつぶす」写像 $f : S^1 \to S^1$,

$$f(\cos t, \sin t) := \begin{cases} (\cos(3t/2), \sin(3t/2)) & |t| \leq 2\pi/3, \\ (-1, 0) & (2\pi/3) \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

がホモトピー同値写像であることを見ればよいことがわかる．

$F : S^1 \times I \to S^1$ を

$$F((\cos t, \sin t), s) := \begin{cases} (\cos((s+2)t/2), \sin((s+2)t/2)) & |t| \leq 2\pi/(s+2), \\ (-1, 0) & 2\pi/(s+2) \leq |t| \leq \pi \end{cases}$$

で定義すると F は連続で，$F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = f(x)$ である（確かめよ）．よって $f \simeq \mathrm{id}_{S^1}$ である．両辺に id_{S^1} を合成して

$$\mathrm{id}_{S^1} \circ f \simeq \mathrm{id}_{S^1}, \quad f \circ \mathrm{id}_{S^1} \simeq \mathrm{id}_{S^1}$$

がわかる．つまり「左側三分の一をつぶす」写像 f はホモトピー同値写像で，ホモトピー逆写像は id_{S^1} である．F は $s = 0$ のとき id_{S^1} で，s が増加すると $(-1, 0)$ の近くから順に「つぶしていく」写像になっている．

練習として，問題を一つ追加しておく．図 5 のように絵を使って証明せよ．
問題．問題 6 の $\sigma^{(1)}$ に，2 単体 $|v_1v_2v_3|$ を付け加えた単体複体を K とする．$|K| \simeq S^1 \vee S^1$ を示せ．