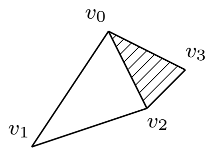
トポロジー 演習・レポート問題 6（2012 年 11 月 12 日）

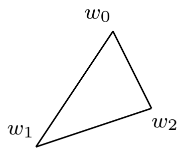
担当：境 圭一

【レポート問題】（11/19 の講義開始前までに提出してください）

(1) K, L を下図のような単体複体とする（斜線部の 2 単体は含み，斜線のない三角形の内部は含まないという意味）．K に含まれる単体を全て書け.

(2) 写像 $\Phi : K^{(0)} \to L^{(0)}$ を，$\Phi(v_i) = w_i\ (0 \le i \le 2)$, $\Phi(v_3) = w_0$ で定義する．Φ は単体写像であることを示せ．また $x = \dfrac{v_0}{4} + \dfrac{v_2}{2} + \dfrac{v_3}{4} \in |K|$ に対し，$|\Phi|(x) \in |L|$ を w_i を使って表せ．さらに，$|\Phi|(x)$ を図示せよ.

$K =$ 

$L =$ 

【演習問題】

1. 単体複体 K に対し $\pi_1(K, v_0)$ が群になること（定理 6.1）の証明を完成させよ.

2. 講義で与えた S^1 の単体分割 $|K| \to S^1$ について，$\pi_1(K, v_0) \cong \mathbb{Z}$ であること（定理 6.2）の証明を完成させよ．つまり，$\varphi : \pi_1(K, v_0) \to \mathbb{Z}$ と $\psi : \mathbb{Z} \to \pi_1(K, v_0)$ が準同型であること，$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ であることを確かめよ.

3. 3 単体 $\sigma = |v_0 \dots v_3|$ の 0, 1, 2-面単体のみからなる単体複体を $\sigma^{(2)}$ とする．つまり $\left|\sigma^{(2)}\right|$ は中身のない四面体である．v_0 を基点とする K のループ η について，途中で通る 0 単体の数を η の長さと呼ぶことにする．例えば定値ループ $c := \overrightarrow{v_0 v_0}$ は長さ 0, $\overrightarrow{v_0 v_1 v_0}$ は長さ 1 である.
   (1) 長さ 1 のループは c と同値であることを示せ.（ヒント：簡約）
   (2) $\eta = \overrightarrow{v_0 v_{i_1} \dots, v_{i_k} v_0}$（ただし $i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, 3$, 隣同士は互いに異なる）を，長さ k の任意のループとする．η は長さ $(k-1)$ のループと同値であることを示せ.（ヒント：$v_{i_{k-1}} v_{i_k} v_0$ に注目して簡約または 2-同値を使う）
   (3) k に関する帰納法により，$\pi_1(\sigma^{(2)}, v_0) = \{1\}$ であることを示せ.
   (4) 同様に，n 単体 σ に対し $\sigma^{(n-1)}$ を定義し，$n \ge 3$ のとき $\pi_1(\sigma^{(n-1)}, v_0) = \{1\}$ を示せ.

4. K, L を単体複体，$\Phi : K^{(0)} \to L^{(0)}$ を単体写像とし，$\Phi(v_0) = w_0$ であるとする.
   (1) K のループ $\eta = \overrightarrow{v_0 v_1 \dots v_0}$ に対し，L のループ $\overrightarrow{\Phi(v_0)\Phi(v_1)\dots\Phi(v_0)}$ が定まることを示せ.
   (2) (1) の対応により，準同型写像 $\Phi_* : \pi_1(K, v_0) \to \pi_1(L, w_0)$ が定義されることを示せ（「トポロジー入門」問題 7.8 参照）.
   (3) 講義の例 6.5 の Ψ（単体写像ではない）の場合，K のループ $\overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0}$ は L のループにはうつされないことを確かめよ.

後日略解を掲載します.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html