トポロジー 演習・レポート問題6（2012年11月12日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) 0単体は $|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_3|$, 1単体は $|v_0v_1|, |v_0v_2|, |v_0v_3|, |v_1v_2|, |v_2v_3|$, 2単体は $|v_0v_2v_3|$.

(2) 例えば2単体 $|v_0v_2v_3|$ に対し，頂点の行き先は $\{w_0, w_2\}$ で，これは L の1単体 $|w_0w_2|$ の頂点．同様のことを (1) で列挙した10個の単体 すべて について確かめる．この場合「同様に」は認められない．$|\Phi|(x) = (w_0 + w_2)/2$ は辺 $|w_0w_2|$ の中点.

【演習問題】

3. (1) 長さ1のループは $\overrightarrow{v_0v_iv_0}$ の形．これは縮約により定値ループと同値.

(2) $v_{i_{k-1}}v_{i_k}v_0$ の部分に注目する．$v_{i_{k-1}} \neq v_0$ なら2-同値，$v_{i_{k-1}} = v_0$ なら縮約による変形により，この部分を $v_{i_{k-1}}v_0$ と書き換えたものは η と同値．長さは1減る.

(3) 長さ k 未満のループは全て定値ループと同値であると仮定すると，(2) より長さ k のループも（長さ $k-1$ のループを介して）定値ループと同値になる．(1) と合わせて帰納法が完成する.

(4) n 単体 σ の $0, 1, \ldots, n-1$ 面単体すべてからなる単体複体を $\sigma^{(n-1)}$ とすると，$n \geq 3$ のときは (1)〜(3) の証明をそのまま使って $\pi_1(\sigma^{(n-1)}, v_0) = \{1\}$ を示せる.

注意．11/5の演習問題4と同様にすると，$\sigma^{(n-1)}$ は S^{n-1} の単体分割であることがわかる．よって上の証明から $\pi_1(S^{n-1}, x_0) = \{1\}$ $(n \geq 3)$ がわかる．$n = 2$ のときは $\sigma^{(1)}$ が2単体を含まないので2-同値を使えず，証明がうまくいかない.

4. (1) 各 $|v_iv_{i+1}|$ が K の1単体であることと Φ が単体写像であることから，各 i に対し次のいずれかが成り立つ：

- $\Phi(v_i) \neq \Phi(v_{i+1})$ で，L の1単体 $|\Phi(v_i)\Phi(v_{i+1})|$ が存在する
- $\Phi(v_i) = \Phi(v_{i+1})$

いずれの場合も L 内で path がつながり，ループができる.

(2) 「トポロジー入門」問題7.8の解答参照.

(3) $|v_2v_0|$ に対応する辺が L に存在しない.