トポロジー 演習・レポート問題 7（2012 年 11 月 19 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（11/26 **午前 10 時まで**に提出してください）
$\mathbb{R}^2$ 内の点 $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (3,0)$, $v_2 = (2,1)$, $v_3 = (-1,2)$, $v_4 = (1,3)$ に対し，$|v_0v_1v_2|$, $|v_2v_3v_4|$, $|v_0v_3|$ と，これらの面単体すべてからなる単体複体を K とする．重心細分 $D(K)$ を図示せよ．また $\mathrm{mesh}(D(K))$ を求めよ．

【演習問題】以下「参考書」は「トポロジー入門」（田中利史・村上斉著）

1. 単体複体 K に対し，重心細分 $D(K)$ も単体複体になること（補題 7.3）の証明を完成させよ.（参考書の問題 1.9, 1.10）

2. $\sigma = |v_0 \dots v_k|$ の直径 $\mathrm{diam}(\sigma)$ は，σ の 1-面単体の長さの最大値であることを示せ．また $\mathrm{mesh}(D(\sigma))$ は $|v_i\hat{\tau}|$ $(v_i < \tau < \sigma)$ の長さの最大値であることを示せ.（参考書の問題 1.11）

3. 単体複体 $K = \bigcup_i \sigma_i$ について，$|K| = \bigsqcup_i \mathrm{Int}(\sigma_i)$ であることを示せ．ただし $\bigsqcup$ は共通部分のない和集合を表す（つまり $i \neq j$ なら $\mathrm{Int}(\sigma_i) \cap \mathrm{Int}(\sigma_j) = \emptyset$ ということ）.（参考書の問題 2.3）

4. 3 単体 σ の重心細分 $D^d(\sigma)$ $(d = 0,1,2,\dots)$ について，k-面単体 $(0 \le k \le 3)$ の数を b_k^d とおく．なるべく多くの d に対し，$b_0^d - b_1^d + b_2^d - b_3^d$ を求めてみよ．

5. レポート問題の単体複体 K について，開星状近傍 $\mathrm{St}(v_i; K)$, $\mathrm{St}(v_i; D(K))$ $(i = 2,3)$ を図示せよ．

6. （今までの復習です）$\mathbb{O} := \{(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \mid 1 \le r \le 3,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ とする． (10/22 の問題 5)
   (1) $\mathbb{O}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ．
   (2) $f : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ を $f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) := (r\cos(\theta + (r-1)\pi),\, r\sin(\theta + (r-1)\pi))$ で定義する．f は同相写像であることを示せ．また $f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{O}}$ であることを示せ.（ホモトピーを構成せよ）
   (3) $x_0 := (3,0) \in \mathbb{O}$ を基点とする二つのループ $\gamma_1, \gamma_2 : (I, \partial I) \to (\mathbb{O}, x_0)$ を
   $$\gamma_1(t) := (1 + 2\cos 2\pi t,\, 2\sin 2\pi t), \quad \gamma_2(t) := (3\cos 2\pi t,\, 3\sin 2\pi t)$$
   で定める．$\gamma_1 \simeq \gamma_2 \ \mathrm{rel}\ x_0$ であることを示せ.（ホモトピーを構成せよ）
   (4) S^1 の基点 y_0 を取る．$\pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$ であることを（まだ証明は終わっていないが）使って，$\mathbb{O}$ は可縮でないことを示せ．
   (5) $\mathbb{O}$ の単体分割を一つ構成せよ．
   (6) $S := \{(x,y) \in \mathbb{O} \mid y \le 0\}$ とおく．$S \simeq \{*\}$ であることを示せ.（ホモトピーを構成せよ）
   (7) $T := \mathbb{O} \setminus \{(0,2)\}$ とおく．$T \simeq S^1 \vee S^1$ であることを，絵を使って示せ．
   (8) $U := \mathbb{O} \setminus \{(0,2),\,(0,-2)\}$ とおく．$U \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$ であることを，絵を使って示せ．

後日略解を掲載します.
http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html