トポロジー 演習・レポート問題 7（2012 年 11 月 19 日）略解

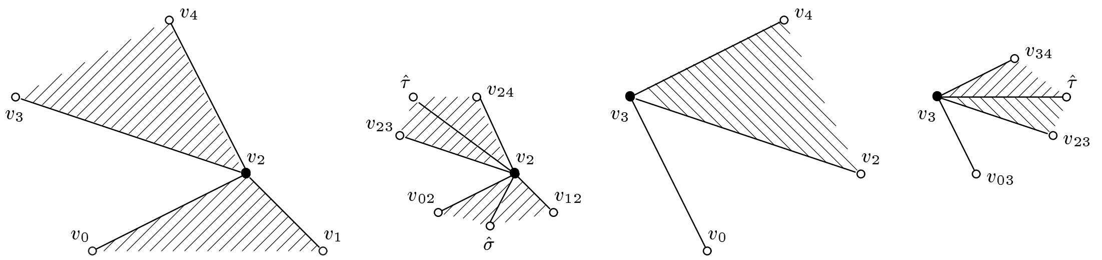
担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【演習問題】

4. 例えば $d = 1$ のときは，$b_0^1 = 15$, $b_3^1 = 50$, $b_2^1 = 60$, $b_3^1 = 24$ で，$b_0^1 - b_1^1 + b_2^1 - b_3^1 = 1$. $d \geq 2$ では大変だが，実は $d \geq 0$ によらず $b_0^d - b_1^d + b_2^d - b_3^d = 1$ である．重心細分するたびに各 3 単体から $0, 1, 2, 3$ 単体がいくつ生じるかを考えれば証明できるが，ここでは略.

5. 下図の通り．$\sigma := |v_0v_1v_2|$, $\tau := |v_2v_3v_4|$ とおき，それらの重心を $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ と書いた．また $|v_0v_2|$ の重心（中点）を v_{02} などと書いた.



$\mathrm{St}(v_2; K)$ $\quad$ $\mathrm{St}(v_2; D(K))$ $\quad$ $\mathrm{St}(v_3; K)$ $\quad$ $\mathrm{St}(v_3; D(K))$

6. (1) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{O}$ は開集合である．実際，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{O}$ に対し，$\boldsymbol{x}$ の δ 近傍

$$U(\boldsymbol{x}, \delta) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < \delta\}$$

が $U(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{O}$ をみたすように $\delta > 0$ を選ぶことができる（確かめよ）.

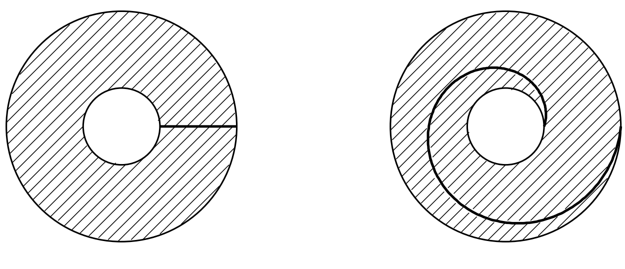
(2) f は左下図の太線部を右下図の螺旋にうつすような写像である．中心から離れるほど反時計回りへの回転角が大きくなる．逆写像を得るには逆回転させればよいので，f の逆写像は

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) := (r\cos(\theta - (r-1)\pi),\, r\sin(\theta - (r-1)\pi))$$

であることがわかる．また f と $\mathrm{id}_{\mathbb{O}}$ を結ぶホモトピー $F : \mathbb{O} \times I \to \mathbb{O}$ は，例えば

$$F((r\cos\theta, r\sin\theta), t) := (rcos(\theta + t(r-1)\pi),\, r\sin(\theta + t(r-1)\pi))$$

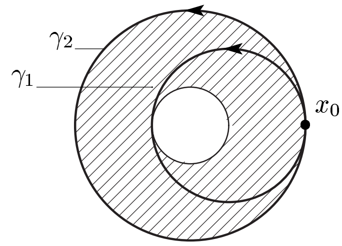
で与えられる．$F(-, 0) = \mathrm{id}_{\mathbb{O}}$, $F(-, 1) = f$. t が増えると回転角がだんだん大きくなって $t = 1$ で f に至るわけである.



(3) それぞれ下図のようなループである．例えば $G : I \times I \to \mathbb{O}$ を

$$G(t, s) := (1 - s + (2 + s)\cos 2\pi t,\ (2 + s)\sin 2\pi t)$$

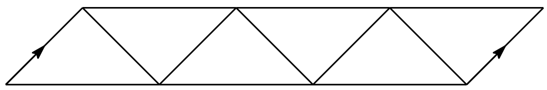
とおけば G は連続で，$G(t, 0) = \gamma_1(t)$, $G(t, 1) = \gamma_2(t)$, $G(0, s) = x_0 = G(1, s)$. γ_1 から γ_2 に変形するには中心を $(1, 0)$ から $(0, 0)$ に，半径を 2 から 3 にすればよいので，$G(-, s)$ は中心 $(1 - s, 0)$, 半径 $(2 + s)$ にすればよい，と考えると上の式を得る．



(4) $\mathbb{O} \simeq S^1$ だから $\pi_1(\mathbb{O}, x_0) \cong \pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$ （講義では基点を保つホモトピー同値の場合のみ扱ったが，実際には基点を保たなくてもよい）．もし $\mathbb{O} \simeq *$ ならば $\pi_1(\mathbb{O}, x_0) \cong \pi_1(*)$ だが，$\pi_1(*) = \{1\}$ だから矛盾．

注意．原点を中心とし半径 3 の円板 D を考えると $\mathbb{O} \subset D \simeq *$. このことからわかるように，可縮な空間の部分空間は可縮とは限らない．

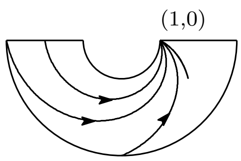
(5) 下図のように 2 単体を 6 つ並べ，矢印のついている 1 単体を同じ向きに貼り合わせた単体複体を考えると $\mathbb{O}$ の単体分割になっている．2 単体の数が 5 つ以下だと単体複体にならないことに注意せよ（単体同士の交わりが一つの面単体でなくなる）．



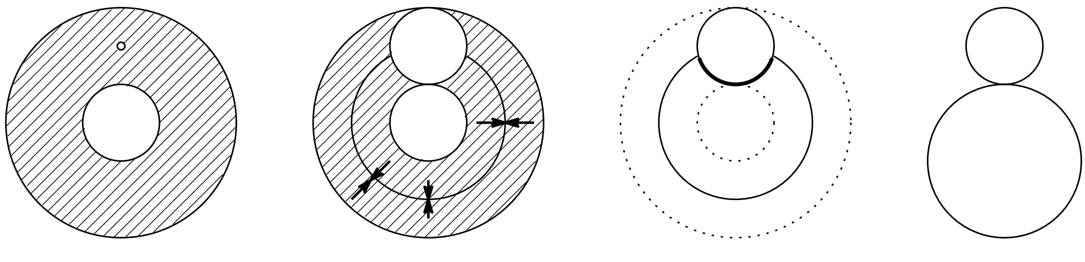
(6) $S = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 1 \leq r \leq 3,\ -\pi \leq \theta \leq 0\}$ と表されることに注意する．例えば $i : \{*\} \to S$ を $i(*) := (1, 0)$ で定義し，$c : \mathbb{O} \to \{*\}$ を定値写像とすると，$c \circ i = \mathrm{id}_{\{*\}}$. $i \circ c(r\cos\theta, r\sin\theta) = (1, 0)$ と id_S の間のホモトピー $H : S \times I \to S$ は，例えば

$$H((r\cos\theta, r\sin\theta), s) := (((1 - s)r + s)\cos s\theta,\ (1 + s(r - 1))\sin s\theta))$$

で与えられる．$H(-, 0) = i \circ c$, $H(-, 1) = \mathrm{id}_S$. だいたい下図のように S を $(1, 0)$ に向けて縮めるホモトピーである．



(7) まず $(0, 2)$ に空いた穴を「押し広げる」と二番目の絵になる．次に $\mathbb{O}$ の厚みを「つぶす」と三番目の絵になる．最後に太線部分を一点につぶすと $S^1 \vee S^1$ になる．



(8) 前問と同様なので略．二番目の絵で，上と下にも穴が開く．