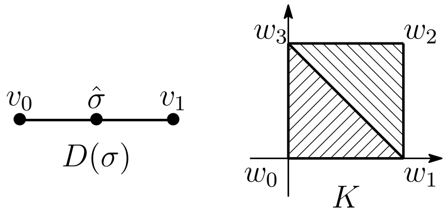
トポロジー 演習・レポート問題 8（2012 年 12 月 3 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（12/10 の講義開始前までに提出してください）

$\sigma := |v_0 v_1|$ を 1 単体，K を図のような単体複体とし，多面体 $|\sigma|$ は $I = [0,1]$ と，$|K|$ は $\mathbb{R}^2$ の中の正方形 $I \times I$ と同一視する．多面体の間の連続写像 $f : |\sigma| \to |K|$ を $f(t) := (t,t)$ $(t \in I)$ で定義する．$\Phi : D(\sigma)^{(0)} \to K^{(0)}$ を，$\Phi(v_0) := w_0$, $\Phi(\hat{\sigma}) := w_1$, $\Phi(v_1) := w_2$ で定義すると，Φ は f の単体近似であることを示せ.（「トポロジー入門」演習問題 2.3, 2.4 参照）



【演習問題】以下「参考書」は「トポロジー入門」（田中利史・村上斉著）

1. 参考書の定理 8.2.1 を参考にして，位相空間 X の単体分割 $|K| \xrightarrow{\approx} X$ に対し $\pi_1(K, v_0) \cong \pi_1(|K|, v_0)$ であることの証明の細部を完成させよ.

2. 連続写像 $f : |K| \to |L|$ に対し，単体写像 $\Phi : K^{(0)} \to L^{(0)}$ が f の単体近似であることは,「$\forall v \in K^{(0)}$ に対し $f(\mathrm{St}(v;K)) \subset \mathrm{St}(\Phi(v);L)$」と同値であることを証明せよ.（参考書の補題 2.2.2）

3. K, L, M を単体複体，$f : |K| \to |L|$ と $g : |L| \to |M|$ を連続写像とする．$\Phi : K^{(0)} \to L^{(0)}$ と $\Phi : L^{(0)} \to M^{(0)}$ がそれぞれ f, g の単体近似であるとき，$\Psi \circ \Phi : K^{(0)} \to M^{(0)}$ も単体写像で，$g \circ f : |K| \to |M|$ の単体近似になっていることを示せ.（参考書の演習問題 2.5）

※以下，中間試験で間違いが多かった箇所の補足です

4. 誤った主張「S^1 は可縮である」を以下のように「証明」する．誤りを指摘せよ．

   「証明」$f : \{\mathbf{0}\} \to S^1$ を $f(\mathbf{0}) := (1,0)$ で定義し，$c : S^1 \to \{\mathbf{0}\}$ を定値写像とすると $c \circ f = \mathrm{id}_{\{\mathbf{0}\}}$．$f \circ c : S^1 \to S^1$ は $(1,0) \in S^1$ への定値写像．$F : S^1 \times I \to S^1$ を $F((x,y),t) := (1-t)(x,y) + t(1,0)$ で定めると F は連続で，$F((x,y),0) = (x,y) = \mathrm{id}_{S^1}(x,y)$, $F((x,y),1) = (1,0) = f \circ c(x,y)$ だから $f \circ c \simeq \mathrm{id}_{S^1}$．よって $f : \{\mathbf{0}\} \xrightarrow{\simeq} S^1$ はホモトピー同値写像.

5. $v_0 := (1,0)$, $v_1 := (1,1)$, $v_2 := (0,1)$ とする．

   (1) $i \neq j$ のとき，v_i と v_j は一次独立であることを示せ

   (2) $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立ではないことを示せ.

   (3) v_0, v_1, v_2 は一般の位置にあることを示せ.

6. レポート問題の単体複体 K の重心細分を図示せよ.

7. 2 単体 $|v_0 v_1 v_2|$ の 0, 1-面単体からなる単体複体 L を考える．$\pi_1(L, v_0) \cong \mathbb{Z}$ を使って，L の二つのループ $\eta_1 := \overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0}$ と $\eta_2 := \overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0 v_1 v_2 v_0}$ はホモトピックでないことを示せ.

後日略解を掲載します.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html