トポロジー 演習・レポート問題 8（2012 年 12 月 3 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

Φ が単体写像であることは容易なので略.
$|v_0\hat{\sigma}|$ 上の点 $x=(1-t)v_0+t\hat{\sigma}$ $(0\le t\le 1)$ に対し $f(x)=(t/2,\,t/2)$．まず $0<t<1$ のとき，$f(x)$ を含む単体は $|w_0w_1w_3|$ のみ．一方 $|\Phi|(x)=(1-t)w_0+tw_1\in|w_0w_1|<|w_0w_1w_3|$ ($\mathbb{R}^2$ の座標では $|\Phi|(x)=(t,0)$).
次に $t=0$ のとき，$f(x)=(0,0)$ を含む単体は $|w_0|$, $|w_0w_1|$, $|w_0w_3|$, $|w_0w_1w_3|$ の 4 つ．$|\Phi|(x)=w_0\in|w_0|$ であり，$|w_0|<|w_0w_1|,|w_0w_3|,|w_0w_1w_3|$ だから，$|\Phi|(x)\in|w_0w_1|,|w_0w_3|,|w_0w_1w_3|$ もわかる.
同様に $t=1$ のとき $f(x)=(1/2,\,1/2)\in|w_1w_3|<|w_0w_1w_3|,|w_1w_2w_3|$ に対応して，$|\Phi|(x)=(1,0)\in|w_1w_3|<|w_0w_1w_3|,|w_1w_2w_3|$.
$x\in|\hat{\sigma}v_1|$ のときも同様に調べると，Φ は f の単体近似の条件をみたすことがわかる.

注意．

- $f(x)$ を含む単体が複数あるときは，定義によれば全ての単体について条件を確認しなければならないが，実質的には $f(x)$ を <u>内部に</u> 含む単体（あるいは次元の最も低い単体）についてのみ調べれば十分である．上の場合は $f(v_0)\in|w_0|$ や $f(\hat{\sigma})\in|w_1w_3|$ が本質的.
- σ を重心細分しないと，f の単体近似 $\Psi:\sigma\to K$ は存在しない．証明を試みよ.

【演習問題】

4. $0<t<1$ のとき $F((x,y),t)\notin S^1$ だから，$F:S^1\times I\to S^1$ という写像が定義されていない.

   この「証明」が述べているのは，S^1 は <u>$\mathbb{R}^2$ の中では</u> 一点につぶせる，ということである（同じ式で $F:S^1\times I\to\mathbb{R}^2$ なら定義できる）．つまり，別の空間 $\mathbb{R}^2$ の「つぶせる部分」に入っているからつぶれるように見えるのであり，それは S^1 自身の性質ではない.

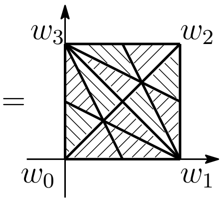
   問題文の「証明」は明らかな誤りですが，一見もっともらしくなるように書きました．このように，自信たっぷりに証明してあることが実は誤りであるという例はいくらでもあります（本来あってはならないのですが）．書いてあることを鵜呑みにせず，自ら考えて読むことが大切です.

5. v_i と v_j $(i\ne j)$ が一次独立であることはすぐにわかる．一方，$\mathbb{R}^2$ の中で三つのベクトルが一次独立であるということはありえない．このように，どの二つのベクトルも一次独立であるが全体として一次独立でない，ということはあり得る.

   $\overrightarrow{v_0v_1}=(0,1)$ と $\overrightarrow{v_0v_2}=(-1,0)$ が一次独立なのはすぐにわかり，従って v_0,v_1,v_2 は一般の位置にある．このように，一次独立でない $v_0,v_1,\dots$ でも一般の位置にあることはあり得る.

   なお，一般の位置にあることの証明としては，例えば $\overrightarrow{v_1v_0}$ と $\overrightarrow{v_1v_2}$ が一次独立であることを示してもよい．つまり，始点は v_0 以外にしてもよい（理由を考えよ）.

6. 次の通り．

$D(K) =$ 

7. 例えば，ループが $\overrightarrow{v_2v_0}$ をこの向きに何度通るか，を数えることで，同型 $\pi_1(L, v_0) \cong \mathbb{Z}$ が得られた（11/12 の講義参照）．この同型のもとで，$[\eta_1] = 1 \in \mathbb{Z}$, $[\eta_2] = 2 \in \mathbb{Z}$ である．もし $\eta_1 \simeq \eta_2$ rel v_0 とすると，$\pi_1(L, v_0)$ の元として $[\eta_1] = [\eta_2]$ だから矛盾．

   $\pi_1(L, v_0) \cong \mathbb{Z}$ だから，L には互いにホモトピックでないループが，少なくとも整数と同じ数だけ（可算無限個）あることになる．中間試験の問題 3. で「すべてのループを列挙すると…」という答案があったが，それは不可能である．