

【レポート問題】(12/17の講義開始前までに提出してください)

$G = \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \rangle$ という表示を持つ群 G を考える.

- (1) $g_1, g_2 \in F_2$ が表す代表元も $g_1, g_2 \in G$ と書く. G においては $g_1 g_2 = g_2 g_1$ であることを示せ.
- (2) G は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

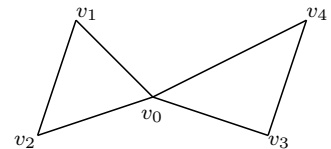
【演習問題】群論のテキストを適宜参照すること.

1. 階数 n の自由群 F_n が実際に群の構造を持つことを確かめよ.
2. $\langle x, y \mid x^4 y^3, x^2 y \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\langle x, y \mid x^4 y^3, x^2 y^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\langle x, y \mid x^5 y^3, x^2 y^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を示せ.
3. 3次対称群 S_3 は $S_3 = \langle \tau_{12}, \tau_{23} \mid \tau_{12}^2, \tau_{23}^2, (\tau_{12}\tau_{23})^3 \rangle$ と表示されることを示せ.
4. $G := \langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle$, $H := \langle h_1, \dots, h_m \mid s_1, \dots, s_n \rangle$ に対し

$$G * H := \langle g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_m \mid r_1, \dots, r_l, s_1, \dots, s_n \rangle$$

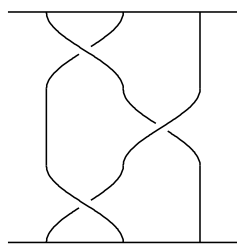
を G と H の自由積 (free product) とよぶ. $F_m * F_n \cong F_{m+n}$ を示せ.

5. (1) 右図のようなグラフで表される単体複体 K は $S^1 \vee S^1$ の単体分割であることを示せ.

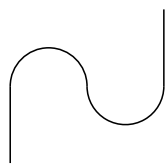


- (2) 全射準同型 $\pi_1(K, v_0) \rightarrow F_2$ を構成せよ.

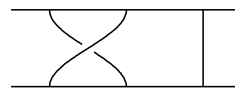
6. 発展的な問題です. 余力があれば考えてみてください. 参考文献は「組みひもの数理」(河野俊丈著, 遊星社). 下図のように, 天井と床に同じ数の点が固定され, それらを互いに絡まったひもが繋いでいるものを組みひも (braid) とよぶ. 各々のひもの足は始点の真下でもよいし, そうでなくてもよい. 途中で「極大点・極小点」は存在しない. ある組みひも x を, 天井と床では固定したまま, ひもを連続的に変形して (途中で互いに交叉せず, 極大・極小を生じずに) 別の組みひも y に変形できるとき $x \sim y$ と書き, これにより組みひも全体の集合に同値関係 \sim を定義する. $B_n := \{n \text{ 本のひもからなる組みひも} \} / \sim$ とする. 以下では主に $n = 3$ とする.



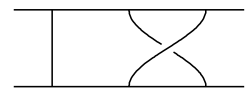
組みひもの例



このような部分はない



σ_{12}



σ_{23}

- (1) 二つの組みひも x, y があるとき, x の「下」に y を置き, x の床と y の天井でひもを繋ぐことによって新たな組みひもができる. これを xy と書くことにする. この演算で, B_n は群の構造を持つことを示せ. 図の組みひも σ_{12}, σ_{23} の逆元 $\sigma_{12}^{-1}, \sigma_{23}^{-1}$ を図示せよ. 左上図の組みひもは $\sigma_{12}^{-1} \sigma_{23} \sigma_{12}^{-1}$ であることを示せ.
- (2) $r := \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{12} (\sigma_{23} \sigma_{12} \sigma_{23})^{-1}$ とおくと, 実は $B_3 \cong \langle \sigma_{12}, \sigma_{23} \mid r \rangle$ である. 実際に, 3本のひもからなる組みひもを適当に描き, それを $\sigma_{12}^{\pm 1}, \sigma_{23}^{\pm 1}$ の積で表してみよ. また B_3 において $r = 1$ であること, つまり r が表す組みひもは単位元を表す組みひもに変形できることを示せ.
- (3) 3次対称群 S_3 への全射準同型 $p: B_3 \rightarrow S_3$ を構成せよ. $\ker p$ はどのような部分群か?
- (4) (難) $\pi_1(X) \cong B_3$ となるような位相空間 X を考えてみよ.

後日略解を掲載します.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html