トポロジー 演習・レポート問題 9（2012 年 12 月 10 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) 関係式は，G においては $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}=1$ つまり $g_1g_2=g_2g_1$ であることを意味する．

(2) (1) より，G の任意の元は，積の順序を入れ替えることで $g_1^kg_2^l$ $(k,l\in\mathbb{Z})$ と一意的に書けることになる．この元に対し $(k,l)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を対応させる写像が同型写像である（確かめよ）．

【演習問題】

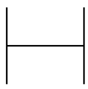
2. 最初の群について，関係式の二つ目は G において $y=x^{-2}$ であることを意味する．関係式の一つ目に代入すると $x^4y^3=x^4(x^{-2})^3=x^{-2}$ となるから，この群は $\langle x \mid x^{-2}\rangle$ と表示される群と同型．よって $\mathbb{Z}/2:=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型．他も同様（略）．

3. τ_{ij} を i,j の互換とすれば，S_3 の元が全て τ_{12},τ_{23} の積で書かれ，問題文の関係式がみたされることは容易にわかる．難しいのは，関係式がこれで十分である（これ以上必要がない）こと．それは複雑なので略．群論のテキストを参照のこと．

4. $F_n=\langle g_1,\dots,g_n \mid \ \rangle$ であったことから容易に従う．

5. (2) 作り方は一通りではないが，最も自然と思われるのは次の通り．$e_1,e_2\in\pi_1(K,v_0)$ を $e_1:=[\overrightarrow{v_0v_1v_2v_0}]$, $e_2:=[\overrightarrow{v_0v_3v_4v_0}]$ で定義し，$\pi_1(K,v_0)\to F_2$ を $e_{j_1}^{p_1}\dots e_{j_l}^{p_l}\mapsto g_{j_1}^{p_1}\dots g_{j_l}^{p_l}$ $(j_1,\dots,j_l=1,2,\ p_i\in\mathbb{Z})$ で定義する．これが well-defined であることは証明を要するが略．今後の講義でやります．

6. 興味があれば質問してください．ごく簡単に答えだけ書いておきます．

   (3) 組みひもの「交叉」の部分を全て  という図形に置き換えるとアミダくじができる．これを S_3 の元とみれば $p:B_3\to S_3$ ができる．具体的には，問題 3 の記号を使うと $p(\sigma_{ij}):=\tau_{ij}$. $\ker p$ の元は，$i=1,2,3$ について，天井の左から i 番目を出発したひもが床の左から i 番目に到達するような組みひもである（このような組みひもを**純組みひも** (pure braid) とよぶ）．

   (4) $X:=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_i\neq z_j\ (i\neq j)\}/S_3$ が答．