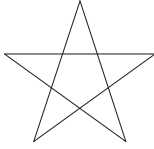


トポロジー 演習・レポート問題 10 (2012年12月17日)

担当：境 圭一

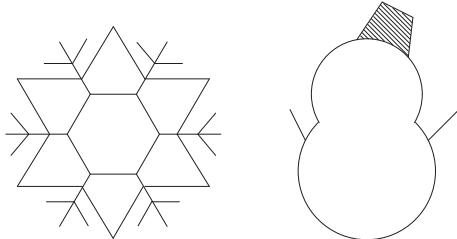
【レポート問題】(12/25の講義開始前までに提出してください)

次のグラフ  $K$  (頂点10個, 辺15本) の基本群を計算せよ.



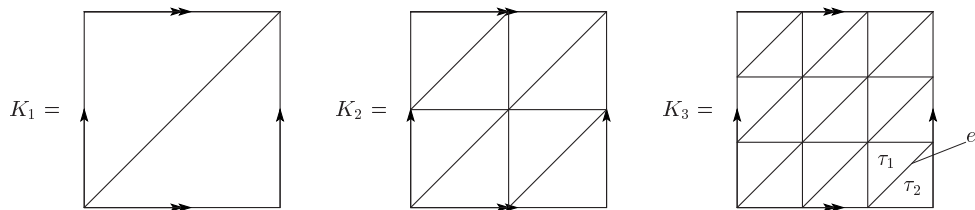
【演習問題】以下「参考書」は「トポロジー入門」(田中利史・村上斉著)

- (1)  $n$  個の  $S^1$  のブーケ  $S^1 \vee \dots \vee S^1$  の基本群が  $F_n$  と同型であることを確かめよ.  
 (2) 任意のグラフは  $S^1$  のいくつかのブーケとホモトピー同値であることを示せ(参考書の §7.3.3 参照). (1) を使って, グラフの基本群は自由群であることを示せ.
- 次の図形の基本群をそれぞれ求めよ. 斜線部は内部も含む.



- トーラス  $T = S^1 \times S^1$  を, 正方形の向かい合う辺を同じ向きで貼り合わせたものとみなす. 単体複体を使って  $\pi_1(T)$  を計算する(参考書の例 7.5.3)

- 次の図において, 三角形は全て中身も含む 2 単体を表す.  $K_1, K_2$  は単体複体ではないこと,  $K_3$  は単体複体である(従って  $T$  の単体分割である)ことを示せ(ヒント:  $K_1, K_2$  では 2 単体どうしの共通部分が一つの単体でない箇所がある)



- $K_3$  から  $\text{Int}(\tau_2)$  を除いた単体複体を  $L$  とし, さらに  $L$  から  $\text{Int}(e) \cup \text{Int}(\tau_1)$  を除いた単体複体を  $L'$  とおく(ともにトーラスに穴をあけたものになっている). van Kampen の定理を使って,  $\pi_1(L) \cong \pi_1(L')$  を示せ(基点は適当に選ぶ).
- $K_3$  から, 外枠だけを残して内部の単体を全て取り除いた単体複体を  $M$  とおく.  $M \cong S^1 \vee S^1$  を示せ. (2) と同様の論法を繰り返すことにより,  $\pi_1(L) \cong F_2$  を示せ.
- $K_3 = L \cup \tau_2$  とみて van Kampen の定理を使い,  $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  を示せ.
- 任意の  $\alpha, \beta \in \pi_1(T)$  に対し  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$  を示せ(中間試験の問題 4 と比べよ)

後日略解を掲載します.

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12\\_topology/12\\_topology.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html)