トポロジー 演習・レポート問題 10（2012 年 12 月 17 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

n 個の S^1 のブーケを $(S^1)^{\vee n}$ と書く．真ん中に見える五角形の辺のうち四つをつぶすと，六個の S^1 のブーケ $(S^1)^{\vee 6}$ とホモトピー同値であることがわかるから，$\pi_1(K) \cong F_6$.

【演習問題】

1. (1) $(S^1)^{\vee n} \approx (S^1)^{\vee(n-1)} \vee S^1$ とみて van Kampen の定理を使えば帰納的に示せる．

   (2) 可縮なグラフを**木** (tree) とよぶ．任意のグラフ G に対し，部分グラフ T で次のような性質を持つものが存在する（一意的ではない）：

   - T は木である．
   - T に含まれない任意の辺 e に対し，$T \cup e$ は木ではない．

   このような T を**極大な**木とよぶ．T が木であることから，T に含まれる各辺をつぶしていって得られるグラフは全て G とホモトピー同値である．T の極大性から，T に含まれない辺 e の両端は必ず T に含まれ，従って T に含まれる辺を全てつぶして得られるグラフ G/T において e は S^1 になる．よって G/T は S^1 のブーケ.

   詳しくは参考書の命題 7.3.16, 定理 7.3.19 の証明を参照のこと．レポート問題や演習問題 2. のグラフに対し，極大な木を一つ求めてみるとよい.

2. 結晶のほうはグラフで，$(S^1)^{\vee 7}$ とホモトピー同値．雪だるまのほうは，バケツの部分を一点に縮めればグラフになり，S^1 とホモトピー同値．基本群はそれぞれ F_7, $F_1 \cong \mathbb{Z}$.

3. (1) K_1 の二つの 2 単体の共通部分は，境界の 3 つの辺である．これは一つの単体でないから，単体複体の条件（講義の定義 5.5(2) 参照）をみたしていない．同様のことが K_2 にも言える．このように，単体の数を（不必要に）増やさないと単体分割できないのが単体複体の欠点の一つ.

   (2) τ_1 と $L' \cap \tau_1$ が共に可縮だから，van Kampen の定理で $\pi_1(L)$ を求めると，$\pi_1(L')$ の生成元と関係式がそのまま現れ，他には何も現れない.

   (3) 正方形の向かい合う辺を同一視すると，四つの頂点は全て同一視されることがわかる．この一点において，縦の辺と横の辺が表す S^1 が接着されて $S^1 \vee S^1$ になる．基本群 F_2 の生成元として，縦の辺が表すループと，横の辺が表すループで代表される元（それぞれ g_1, g_2 とおく）が取れる.

   (4) τ_2 のほうから新たな生成元や関係式は生じない．$\pi_1(L \cap \tau_2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ の生成元は $\partial\tau_2$ を（反時計回りに）一周するループ γ で，これが $\pi_1(T)$ の関係式として新たに付け加わる．γ を $\pi_1(L)$ の元とみたものは $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ に等しいことがわかる．よって $\pi_1(T) \cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \rangle$ であり，前回のレポート問題より $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型.

   (5) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は可換群だから，任意の元 α, β に対し $\alpha\beta = \beta\alpha$, 従って $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$.