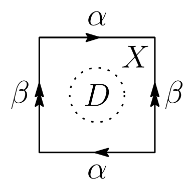
トポロジー 演習・レポート問題 11（2012 年 12 月 25 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（**1/7** の講義開始前までに提出してください）
正方形（内部も含む）の辺を，図中の矢印で指定された向きに貼り合わせて閉曲面 S を作る．
（**クラインの壺** (Klein bottle) とよぶ：検索すればいろいろな画像が出てきます）



(1) 図中に点線で示された円板 D の内部を取り除いた部分を X とおく．$X \simeq S^1 \vee S^1$ を示せ．

(2) 図中のループ α, β が表す $\pi_1(X)$ の元も同じ記号 α, β で表すことにする．∂D を時計回りに一周するループが表す $\pi_1(X)$ の元は $\alpha\beta\alpha\beta^{-1}$ であることを示せ．

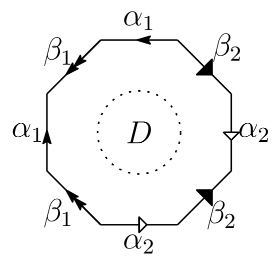
(3) $\pi_1(S) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} \rangle$ を示せ．この群に関係式 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ を付け加えてできる群 H は $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2)$ と同型であることを示せ．

【演習問題】

1. $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$ の証明を完成させよ．

2. 立方体 $I \times I \times I$ の向かい合う面を「同じ向き」に同一視（つまり $(0, y, z) \sim (1, y, z)$ など）して得られる位相空間 T^3 の基本群を求めよ．

3. 八角形（内部も含む）の辺を，図中の矢印で指定された向きに貼り合わせて閉曲面 S を作る．



(1) 八つの頂点は全て S 上で同じ点を表すことを示せ．

(2) $S = \Sigma_2$ であることを示せ．Σ_2 上で，α_1, β_1, α_2, β_2 に対応するループを図示せよ．

(3) $[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = 1 \in \pi_1(\Sigma_2)$ であることを，この図を使って示せ．

(4) Σ_2 上に円板 D を取る．$\Sigma_2 \setminus \mathrm{Int}D \simeq (S^1)^{\vee 4}$ を，この図を使って示せ．

4. Σ_g 上に円板 D を取る．$\Sigma_{g,1} := \Sigma_g \setminus \mathrm{Int}D \simeq (S^1)^{\vee 2g}$ を示せ．それぞれの S^1 を一周するループが表す基本群の元を $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ とし，$\partial\Sigma_{g,1}$ を一周するループを γ とするとき，番号をうまくつければ $[\gamma] = [\alpha_1, \beta_1] \ldots [\alpha_g, \beta_g] \in \pi_1(\Sigma_{g,1})$ となることを示せ．このとき，α_i, β_i に対応するループを $\Sigma_{g,1}$ 上に描け．

5. $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$, $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$ とし，$i : X \to Y$ は包含写像，$f : X \to Y$ は

$$f(x, y) := \begin{cases} (0, y) & x \leq 0 \\ (x, y) & x \geq 0 \end{cases}$$

とする．$\pi_1(X, \mathbf{0})$, $\pi_1(Y, \mathbf{0})$ と準同型 $i_*, f_* : \pi_1(X, \mathbf{0}) \to \pi_1(Y, \mathbf{0})$ を求めよ．$i \simeq f$ か？

後日略解を掲載します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html