トポロジー 演習・レポート問題 11（2012 年 12 月 25 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) D を取り除いてできた穴を外枠の辺に向かって拡げればよい．

(2) 右下の点を基点に取って時計回りに一周すればわかる．

(3) $\pi_1(X) \cong F_2$, $\pi_1(D) = \{1\}$. $X \cap D = \partial D = S^1$ であり，$\pi_1(X \cap D)$ の生成元は ∂D を一周回るループ γ である．$X \cap D$ から X への包含写像を i とすると，(2) より $i_*\gamma = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}$ だから，van Kampen の定理より $\pi_1(S)$ が求まる．H においては α と β が可換になるから，$\pi_1(S)$ の関係式は $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha\beta\beta^{-1}\alpha = \alpha^2$. よって $H \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2,\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle$. $H \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ を，$\alpha \mapsto (0,1)$, $\beta \mapsto (1,0)$ で定義すれば well-defined な準同型となり，同型であることがわかる（確かめよ）．

注意．(2) で，∂D を一周するループは例えば $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha$ ではないか，と思う人もいるはず．実際，$\pi_1(S) = \langle \alpha, \beta \mid \beta\alpha\beta^{-1}\alpha \rangle$ と書いても正解である．群の表示において，関係式を共役で取り換えても，結果は同型である（関係式は正規部分群で割ったことから生じているから）．つまり，関係式 $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha$ を

$$\alpha(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha)\alpha^{-1} = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}$$

で取り換えても群は変わらず，問題文のような群の表示が復元する．

【演習問題】

2. 同一視の仕方から

$$T^3 \to S^1 \times S^1 \times S^1, \quad (x, y, z) \mapsto (2\pi x, 2\pi y, 2\pi z)$$

は well-defined な同相写像である．ここで，S^1 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を単に θ と書いている．問題 1. を繰り返し使えば，$\pi_1(T^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. この T^3 のことを **3 次元トーラス**とも呼ぶ．

3. (1) α_1 を貼り合わせると，β_1 の両端の頂点が同一視されることがわかる．他の辺でも同じことを繰り返すと，結局全ての頂点が同一視される．

(2) 例えば，一番上の α_1 の右端の頂点と，一番下の α_2 の左端の頂点を結ぶ対角線を考え，この線で切り離すと，同じ図形が二つできる．これらは共にトーラス（正方形の向かい合う辺を同一視したもの）から円板を取り除いたものになっている．つまり，S は穴あきトーラス二つを穴の境界（切り離した対角線）で貼り合わせたものになる．これは Σ_2 である．

(3) 一番上の α_1 から出発して八角形の辺を反時計回りにまわるループは $[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2]$ で表される．このループは八角形の内部を通って一点につぶれる．

(4) 穴を外に向かって拡げればよい．

4. 一つのアイデアを述べる．前問と同様に $4g$ 角形を考え，その辺を反時計回りに順番に

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_1, \quad \alpha_2, \beta_2, \alpha_2, \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_g, \beta_g, \alpha_g, \beta_g$$

と名付ける．ただし，一回目に出てきた辺は反時計回りに向きをつけ，二回目に出てきたときは時計回りの向きをつける．前問と同様に，適当な対角線で切ると $\Sigma_1 \setminus \mathrm{Int}D$ と $\Sigma_{g-1} \setminus \mathrm{Int}D$ に分かれることが（帰納的に）わかり，従って同じ辺を（向きを合わせて）貼り合わせると Σ_g になる．$\Sigma_{g,1} \simeq (S^1)^{\vee 2g}$ は前問 (4) と同様．$\gamma \simeq [\alpha_1, \beta_1] \ldots [\alpha_g, \beta_g]$ は前問 (3) と同様．ループの絵は，講義中に描いた絵の通りになる．

5. 二つの円周 S_1^1, S_2^1 を

$$S_1^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}, \quad S_2^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

で定める．$j_X : S_1^1 \vee S_2^1 \to X$, $j_Y : S_1^1 \to Y$ を包含写像とすると，これらはともにホモトピー同値写像（$S_1^1 \vee S_2^1$ は原点における一点和）．$\pi_1(X, \mathbf{0})$ については，S_1^1, S_2^1 を一周するループが表す元をそれぞれ g_1, g_2 とすると

$$\pi_1(X, \mathbf{0}) \cong \langle g_1, g_2 \mid \ \rangle = F_2.$$

$\pi_1(Y, \mathbf{0})$ については，S_1^1 を一周するループが表す元を h とすると

$$\pi_1(Y, \mathbf{0}) \cong \langle h \mid \ \rangle = F_1 = \mathbb{Z}.$$

準同型 i_*, f_* を決定するには，生成元の行き先をみればよい．まず i_* について

$$i_*(g_1) = h, \quad i_*(g_2) = 1$$

がわかる．二番目の式は，S_2^1 が Y においては一点に縮むことによる．一方，f_* については

$$f_*(g_1) = f_*(g_2) = 1$$

である．一番目の式は，$f(S_1^1) = \mathbf{0}$（一点）であることによる．

g_1 の行き先が違うから $i_* \neq f_*$ であり，講義の補題 4.6 により $i \not\simeq f$ であることがわかる．

注意．二つの写像がホモトピックであることを示すには，ホモトピーを一つ作ればいいので，ある意味で易しい．一方，ホモトピックでないことを示すには，ホモトピーを作ることが不可能であることを示す必要があり，それは易しくない（無限に考え得る全ての可能性を排除しなければならない）．しかし基本群に導く写像を見れば，問題 5 のように容易に示されることもある．