トポロジー 演習・レポート問題 12（2013 年 1 月 7 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（**1/21** の講義開始前までに提出してください）

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみる．$p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ を $p(x, y) := (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ で定義する．

(1) p は被覆写像であることを示せ．

(2) 任意の $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$ に対し，集合として $p^{-1}(\alpha, \beta) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ であることを示せ．

【演習問題】

1. 講義の例 12.2 の写像 $\mathbb{R}^1 \to S^1$ と $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ が被覆写像であることの証明を完成させよ．

2. $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみて，$p : S^1 \to S^1$ を $p(z) := z^2$ で定義する．

   (1) p は全射であることを示せ．

   (2) $\epsilon > 0$ とする．$z_0 \in S^1$ に対し，$U_\epsilon(z_0) := \{z_0 e^{i\theta} \in S^1 \mid |\theta| < \epsilon\}$ とおく．$\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ からの相対位相について，$U_\epsilon(z_0)$ は S^1 の開集合であることを示せ．

   (3) $\epsilon < \pi$ のとき，$p^{-1}(U_\epsilon(z_0))$ が互いに交わらない二つの開集合の和であることを示せ．

   (4) p は被覆写像であることを示せ．

   (5) 同様に，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$p_n : S^1 \to S^1$, $p_n(z) := z^n$ が被覆写像であることを示せ．任意の $z_0 \in S^1$ に対し，$p_n^{-1}(z_0)$ はいくつの点を含むか？

3. (1) n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ について，講義でやった $n = 2$ の場合を参考にして

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\sim, \quad x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = \pm y$$

   とみなせることを示せ．

   (2) 例 12.2 を参考にして，自然な射影 $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ が被覆写像であることを示せ．

   (3) 定理 12.6 を認めて，$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2$ $(n \geq 2)$ を示せ（例 12.7 も参照せよ）．

4. $i = 1, 2$ に対し，$p_i : X_i \to Y_i$ が被覆写像であるとする．このとき $p := p_1 \times p_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, $p(x, y) := (p_1(x), p_2(y))$ は被覆写像であることを示せ．

5. 被覆写像 $p : X \to Y$ は**開写像** (open map), つまり開集合 $U \subset X$ に対し $p(U) \subset Y$ は開集合であることを示せ．(**注意**：これは一般の連続写像については成り立たない性質である）

6. （鎌田正良「集合と位相」（近代科学社）§4.8 を参照せよ）位相空間 X, Y の基点 x_0, y_0 をそれぞれ一つ選ぶ．共通部分のない和集合（位相和）$X \sqcup Y$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$z \sim z' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z = z',\ \text{または}\ (z, z') = (x_0, y_0),\ \text{または}\ (z, z') = (y_0, x_0)$$

   で定め，$X \vee Y := (X \sqcup Y)/\sim$ に商位相を入れたものを X と Y の**一点和** (one point union) とよぶ．$f : X \vee X \to X$ を，それぞれの X 上で id_X と定義する．f は被覆写像か？

後日略解を掲載します．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html`