トポロジー 演習・レポート問題 12（2013 年 1 月 7 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) 任意の $(e^{2\pi ia}, e^{2\pi ib}) \in S^1 \times S^1$ $(0 \leq a, b < 1)$ に対し，その開近傍

$$U := \{(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \mid |x-a| < \epsilon,\ |y-b| < \epsilon\}$$

を取る．$\epsilon > 0$ は十分小さい．このとき $p^{-1}(U) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} V_{m,n}$, ただし

$$V_{m,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-(a+m)| < \epsilon,\ |y-(b+n)| < \epsilon\}$$

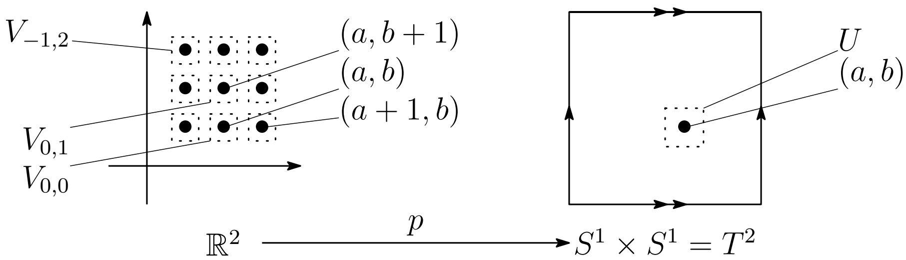
となることがわかる．各 $V_{m,n} \subset \mathbb{R}^2$ は開集合で，ϵ が十分小さければ，$(m,n) \neq (m',n')$ のとき $V_{m,n} \cap V_{m',n'} = \emptyset$ である．各 (m,n) に対し $p : V_{m,n} \to U$ が同相であることを確かめよ．

(2) $\alpha = e^{2\pi ia}$, $\beta = e^{2\pi ib}$ $(0 \leq a, b < 1)$ とすると

$$p^{-1}(\alpha,\beta) = \{(a+m, b+n) \in \mathbb{R}^2 \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$

である．$(a+m, b+n)$ に $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ を対応させると，集合の全単射 $p^{-1}(\alpha,\beta) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ を得る．

注意．講義でやった $\mathbb{R}^1 \to S^1$ の場合の U や V の直積が，上の略解の U や V である．同じようにすると問題 4 ができる．先に問題 4 を証明すれば，レポート問題はその系である．



【演習問題】

2. (2) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の開集合 W で，$W \cap S^1 = U_\epsilon(z_0)$ であるものを見つければよい．取り方はいくらでもあるが，例えば次のように具体的に書くこともできる：$z_0 = e^{ia}$ であるとき

$$W := \{re^{ix} \in \mathbb{C} \mid r > 0,\ |x-a| < \epsilon\}.$$

これは原点を要として無限に広がる扇形．

(3) $z_0 = e^{ia}$ $(0 \leq a < 2\pi)$ のとき，$p^{-1}(U_\epsilon(z_0)) = V_0 \cup V_1$, ただし

$$V_0 = \{e^{ix} \in S^1 \mid |x - a/2| < \epsilon/2\},$$
$$V_1 = \{e^{ix} \in S^1 \mid |x - (\pi + a/2)| < \epsilon/2\}$$

である．これらの弧は原点に関して対称な位置にあるので，その長さ ϵ が半円の長さ π より短ければ交わらない．

(4) $V_0, V_1 \subset S^1$ は互いに交わらない開集合で，$i = 1, 2$ に対し $p : V_i \to U_\epsilon(z_0)$ は同相写像である（確かめよ）．

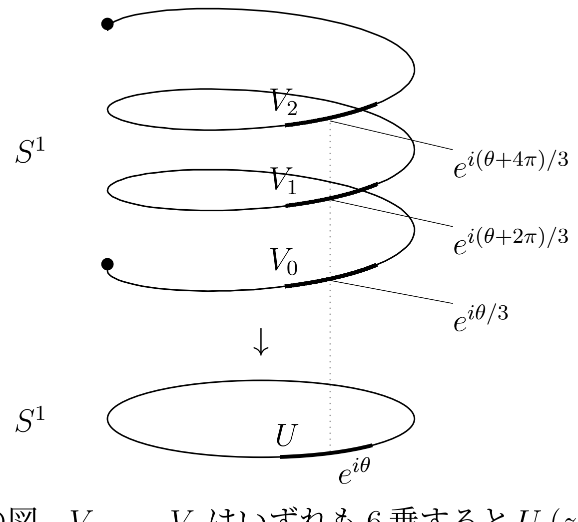
(5) 方程式 $z^n = z_0$ の解 z は n 個あるから，$p^{-1}(z_0)$ は n 個の点からなる．このことから，z_0 の開近傍 U を十分小さく取ると，$p^{-1}(U_\epsilon(z_0))$ も n 個の互いに交わらない開集合に分かれることが想像できる．

任意の $z_0 = e^{ia}$ に対し，$U_\epsilon(z_0)$ を同様に取ると $p^{-1}(U_\epsilon(z_0)) = V_0 \cup \cdots \cup V_{n-1}$, ただし

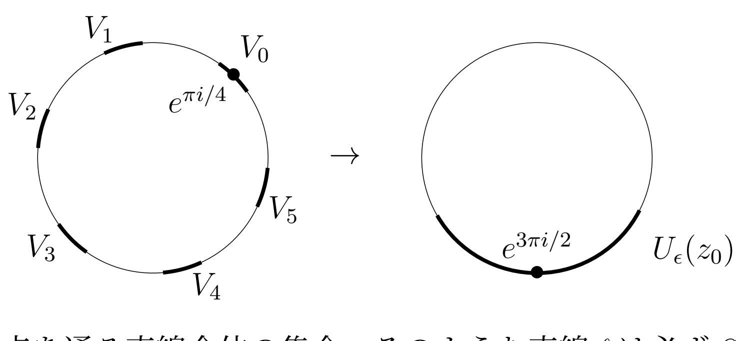
$$V_j = \{e^{ix} \in S^1 \mid |x - (2j\pi + a)/n| < \epsilon/n\}$$

と書ける．$\epsilon < \pi$ ならば，これらは互いに交わらず，また $p : V_j \to U_\epsilon(z_0)$ は同相．

以下は $n = 3$, $z_0 = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ の場合の図．上の螺旋は，端の二点を同一視して S^1 とみなしている．$p^{-1}(e^{i\theta}) = \{e^{i\theta/3}, e^{i(\theta+2\pi)/3}, e^{i(\theta+4\pi)/3}\}$.



以下は $n = 6$, $z_0 = e^{3\pi i/2}$ の図．$V_0, \ldots, V_5$ はいずれも 6 乗すると $U_\epsilon(z_0)$ にうつる．



3. (1) $\mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体の集合．そのような直線 ℓ は必ず $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と二点 $\pm x$ で交わる．ℓ に対し $\pm x$ が定める同値類 $[x] \in S^n/\sim$ を対応させると全単射 $\mathbb{R}P^n \to S^n/\sim$ を得る．

(2) $n=2$ であったところを n におきかえるだけでよい．

(3) $\pi_1(S^n) \cong \{1\}$ $(n \geq 2)$ であったから，$p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ は普遍被覆．被覆変換群は，$n=2$ の場合と同じようにすれば

$$\mathcal{G}(S^n, p) = \{\mathrm{id}_{S^n}, h\}, \quad \text{ただし} \quad h: S^n \to S^n, \quad h(x) := -x$$

であることがわかる．$\mathcal{G}(S^n, p) \to \mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ を，$\mathrm{id}_{S^n} \mapsto 0$, $h \mapsto 1$ で定めれば，群の同型 $\mathcal{G}(S^n, p) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2$ を得る．定理 12.6 より $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathcal{G}(S^n, p) \cong \mathbb{Z}/2$.

4. アイデアはレポート問題と同じ．$y_i \in Y_i$ $(i = 1, 2)$ に対し，十分小さい開近傍 $U_i \subset Y_i$ を取れば

$$p_i^{-1}(U_i) = \bigcup_\lambda V_{i,\lambda}$$

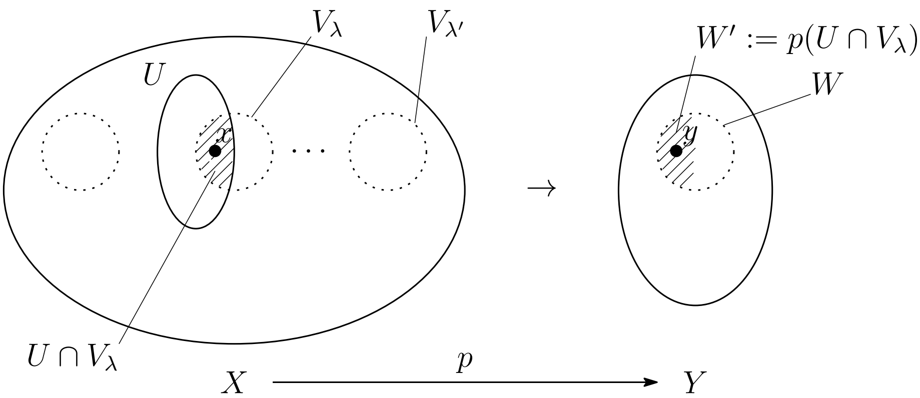
は互いに交わらない X_i の開集合で，各 λ に対し $p_i: V_{i,\lambda} \to U_i$ は同相．このとき (y_1, y_2) の開近傍 $U_1 \times U_2 \subset Y_1 \times Y_2$ に対し

$$p^{-1}(U_1 \times U_2) = \bigcup_{\lambda_1, \lambda_2} V_{1,\lambda_1} \times V_{2,\lambda_2},$$

$V_{1,\lambda_1} \times V_{2,\lambda_2}$ たちは互いに交わらない $X_1 \times X_2$ の開集合で，各 λ_1, λ_2 に対し $p: V_{1,\lambda_1} \times V_{2,\lambda_2} \to U_1 \times U_2$ は同相.

5. 任意の $y \in p(U)$ に対し，$p(U)$ に含まれるような y の開近傍を取れることを言えばよい．

y の開近傍 W を十分小さく取れば，$p^{-1}(W) = \bigcup_\lambda V_\lambda$, $V_\lambda \subset X$ は互いに交わらない開集合で $p: V_\lambda \to U$ は同相，とできる．$y \in p(U)$ より，ある $x \in U$ に対し $p(x) = y$．この x は $x \in p^{-1}(y) \subset p^{-1}(W)$ をみたすから，ある λ に対し $x \in V_\lambda$．この λ に対し $U \cap V_\lambda \neq \emptyset$ で，$U \cap V_\lambda$ は X の開集合．$p: V_\lambda \to W$ は同相だから，その制限 $p: U \cap V_\lambda \to p(U \cap V_\lambda)$ も同相．開集合を同相でうつしたものは開集合だから，$W' := p(U \cap V_\lambda) \subset Y$ は開集合．さらに $W' \subset p(U)$ であり，$x \in U \cap V_\lambda$ だったから $p(x) = y \in W'$．よって $p(U)$ の中で y の開近傍 W' を取ることができた．



6. 接着する点 x_0 の開近傍 $U \subset X$ をどのように取っても，$p^{-1}(U) = U \vee U$ は連結な開集合であり，$p^{-1}(U) \to U$ は同相写像にならない（単射でない）．よって p は被覆写像ではない．