トポロジー 演習・レポート問題 13（2013 年 1 月 21 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（1/28 の講義開始前までに提出してください）
$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみて，被覆写像 $p : \mathbb{R} \to S^1$ を $p(x) := e^{2\pi ix}$ で定義する．

(1) ループ $\gamma : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ を $\gamma(t) := e^{2\pi it}$ で定義する．$\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}(t) := t$ は γ の持ち上げで $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ をみたすことを示せ．(持ち上げはループになっていないことに注意)

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，ループ $\gamma_x : (I, \partial I) \to (S^1, p(x))$ を $\gamma_x(t) := e^{2\pi i(t+x)}$ で定義する．γ_x の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_x : I \to \mathbb{R}$ で，$\widetilde{\gamma}_x(0) = x$ をみたすものを求めよ．

(3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(x) := \widetilde{\gamma}_x(1)$ で定義する．$h(x)$ を求め，h は $p : \mathbb{R} \to S^1$ の被覆変換であることを示せ．

【演習問題】

1. レポート問題の (2) で，γ_x を $\gamma_x(t) := e^{2\pi i(nt+x)}$ に取り換える（これは S^1 を反時計回りに n 周するループ）．$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(x) := \widetilde{\gamma}_x(1)$ で定義するとき，h を求めよ．

2. 被覆写像 $p : S^1 \to S^1$ を $p(z) := z^2$ で定義する．各 $\alpha = e^{2\pi ix} \in S^1$ $(0 \le x < 1)$ に対し，ループ $\gamma_\alpha : (I, \partial I) \to (S^1, p(\alpha))$ を $\gamma_\alpha(t) := e^{2\pi i(t+2x)}$ で定義する．(α は p の定義域の S^1 の元と思い，γ_α は p の値域の S^1 のループと思うとよい)

   (1) γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_\alpha : I \to S^1$ で，$\widetilde{\gamma}_\alpha(0) = \alpha$ をみたすものを求めよ．

   (2) $h : S^1 \to S^1$ を，$h(\alpha) := \widetilde{\gamma}_\alpha(1)$ で定義する．h を求め，h は被覆変換であることを示せ．

3. $n, k \in \mathbb{Z}$ を固定する．被覆写像 $p : S^1 \to S^1$ を $p(z) := z^n$ で定義する．各 $\alpha = e^{2\pi ix} \in S^1$ $(0 \le x < 1)$ に対し，ループ $\gamma_\alpha : (I, \partial I) \to (S^1, p(\alpha))$ を $\gamma_\alpha(t) := e^{2\pi i(kt+nx)}$ で定義する．

   (1) γ_α の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_\alpha : I \to S^1$ で，$\widetilde{\gamma}_\alpha(0) = \alpha$ をみたすものを求めよ．

   (2) $\widetilde{\gamma}_\alpha$ もループになるとき（つまり $\widetilde{\gamma}_\alpha(1) = \alpha$ のとき），n, k がみたすべき条件を求めよ．

   (3) $h : S^1 \to S^1$ を，$h(\alpha) := \widetilde{\gamma}_\alpha(1)$ で定義する．h を求め，h は被覆変換であることを示せ．(2) のとき，$h = \mathrm{id}_{S^1}$ であることを示せ．

4. 被覆写像 $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ を $p(x, y) := (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ で定義する．また，$(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $(\cong \pi_1(S^1 \times S^1))$ を固定する．

   (1) $\alpha = e^{2\pi ix}$, $\beta = e^{2\pi iy}$ $(0 \le x, y < 1)$ とする．$p^{-1}(\alpha, \beta)$ を $\mathbb{R}^2$ 上に図示せよ．

   (2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\gamma_{x,y} : (I, \partial I) \to (S^1 \times S^1, p(x, y))$ を $\gamma_{x,y}(t) := (e^{2\pi i(mt+x)}, e^{2\pi i(nt+y)})$ で定義する．$\gamma_{x,y}$ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_{x,y} : I \to \mathbb{R}^2$ で $\widetilde{\gamma}_{x,y}(0) = (x, y)$ をみたすものを求め，$\mathbb{R}^2$ 上に図示せよ．

   (3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $h(x, y) := \widetilde{\gamma}_{x,y}(1)$ で定義する．$h(x, y)$ を求めよ．また $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ となるような m, n を求めよ．

以下は講義の補足です．

5. X を Hausdorff 空間，$\alpha, \beta : I \to X$ を連続写像とし，$t < 1$ のとき $\alpha(t) = \beta(t)$ であるとする．このとき $\alpha(1) = \beta(1)$ であることを示せ.（ヒント：$\alpha(1) \neq \beta(1)$ と仮定し，それぞれの開近傍 U, V を $U \cap V = \emptyset$ となるように取ると，α, β の連続性から矛盾が生じる）

6. $p : \tilde{X} \to X$ を被覆写像とし，$\gamma : I \to X$ を連続な path とする．このとき，γ の持ち上げ
$$\widetilde{\gamma} : I \to \widetilde{X}, \quad p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$$
は，$\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ を固定すれば一意的である．このことを以下の手順で示せ.

   $\widetilde{\gamma}$ を講義の定理 13.2 で構成した持ち上げで $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0$ をみたすものとし，$\widetilde{\gamma}'$ も $\widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{x}_0$ をみたすような（別の）持ち上げとする．
$$T := \sup\{s \in I \mid t \leq s \text{ に対し } \widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{\gamma}'(t)\}$$
   とおく．$\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{x}_0$ なので $T \geq 0$ は存在する．示したいことは $T = 1$ である．

   (1) $\widetilde{\gamma}(T) = \widetilde{\gamma}'(T)$ を示せ.（問題 5 参照）

   (2) $T < 1$ と仮定する．$\gamma(T) \in X$ の開近傍で許容的なものを取る．つまり
$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} V_\lambda, \quad V_\lambda \subset \widetilde{X} \text{ たちは互いに交わらない開集合で } p : V_\lambda \xrightarrow{\approx} U.$$
   このとき，$\epsilon > 0$ を十分小さく取れば，$T + \epsilon \leq 1$ かつ
$$\exists \lambda, \quad \text{s. t.} \quad t \in (T - \epsilon, T + \epsilon) \ \Rightarrow \ \widetilde{\gamma}(t) \in V_\lambda, \quad \widetilde{\gamma}'(t) \in V_\lambda$$
   となることを示せ.（ヒント：$\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ の連続性）

   (3) 区間 $(T - \epsilon, T + \epsilon)$ において $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}'$ であることを示せ.（ヒント：$p : V_\lambda \to U$ は同相であることと $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma = p \circ \widetilde{\gamma}'$ を使う）

   (4) (3) と T の定義から矛盾を導き，$T = 1$ を示せ.

後日略解を掲載します.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html