トポロジー 演習・レポート問題 13（2013 年 1 月 21 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】 見やすくするため $e^z = \exp z$ などと書く．

(1) $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ は明らか．後は $p(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ を確かめればよい．

(2) $\widetilde{\gamma}_x(t) = t + x$.

(3) (2) より $h(x) = x + 1$. これは連続全単射で，逆写像 $h^{-1}(y) = y - 1$ も連続だから h は同相．また $p(h(x)) = \exp(2\pi i(x + 1)) = \exp(2\pi ix) = p(x)$.

【演習問題】

1. $h(x) = x + n$.

2. (1) $\alpha = \exp(2\pi ix)$ のとき，$\widetilde{\gamma}_\alpha(t) = \exp\Bigl(2\pi i\Bigl(\dfrac{t}{2} + x\Bigr)\Bigr)$.

   (2) $\alpha = \exp(2\pi ix)$ のとき，(1) より $h(\alpha) = \exp(\pi i(1 + 2x)) = -\exp(2\pi ix) = -\alpha$ で，これは同相写像．$p(h(\alpha)) = \exp(2\pi i(1 + 2x)) = \exp(2\pi i \cdot 2x) = (\exp(2\pi ix))^2 = p(\alpha)$.

3. (1) $\widetilde{\gamma}_\alpha(t) = \exp\Bigl(2\pi i\Bigl(\dfrac{kt}{n} + x\Bigr)\Bigr)$.

   (2) $\widetilde{\gamma}_\alpha(1) = \exp\Bigl(2\pi i\Bigl(\dfrac{k}{n} + x\Bigr)\Bigr)$ だから，$\widetilde{\gamma}_\alpha(1) = \alpha = \exp(2\pi ix)$ とすると $\exp\dfrac{2\pi ik}{n} = 1$. このことから $\dfrac{k}{n} \in \mathbb{Z}$.

   (3) $h(\alpha) = \exp\Bigl(2\pi i\Bigl(\dfrac{k}{n} + x\Bigr)\Bigr) = \exp\Bigl(2\pi i \cdot \dfrac{k}{n}\Bigr) \cdot \alpha$. (2) のとき，これは明らかに α に等しい．

4. (1) $p^{-1}(\alpha, \beta) = \{(x + k, y + l) \in \mathbb{R}^2 \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$. x, y 座標がともに整数である点を**格子点** (lattice) と呼ぶが，格子点全体を (x, y) だけ平行にずらしたものになる．

   (2) $\widetilde{\gamma}_{x,y}(t) = (mt + x, nt + y)$. これは二点 (x, y) と $(m + x, n + y)$ を結ぶ線分である．

   (3) $h(x, y) = (m + x, n + y)$. $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ となるのは $m = n = 0$ のとき．

5. ヒントの通りにする．α, β の連続性から，$\epsilon > 0$ が十分小さければ

$$\alpha(1 - \epsilon, 1) \subset U, \quad \beta(1 - \epsilon, 1) \subset V$$

   であるが，仮定から $\alpha(1 - \epsilon, 1) = \beta(1 - \epsilon, 1)$. これは $U \cap V = \emptyset$ に矛盾する．

6. (2) $\widetilde{\gamma}(T) = \widetilde{\gamma}'(T)$ はある V_λ に属する．これと $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ の連続性から直ちに従う．

   (3) $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ は同相だから，特に全単射である．このことと $p(\widetilde{\gamma}'(t)) = \gamma(t) = p(\widetilde{\gamma}(t))$ より $\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{\gamma}(t)$.

   (4) (3) より例えば $\widetilde{\gamma}(T + \epsilon/2) = \widetilde{\gamma}'(T + \epsilon/2)$. ところが $T + \epsilon/2 > T$ だから，これは T の定義に反する．