トポロジー 演習・レポート問題 13（2013 年 1 月 28 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（**2/4 午前 10 時**までに 403 に提出してください）
$p : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像とする．$x_0 \in X$ とし，$\gamma : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ をループとする．また $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, $\widetilde{x}_0 \neq \widetilde{x}_1$ とする．$i = 0, 1$ に対し，γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_i : I \to \widetilde{X}$ で $\widetilde{\gamma}_i(0) = \widetilde{x}_i$ をみたすものを取る．

(1) $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ の持ち上げ $\alpha_i : I \to \widetilde{X}$ で $\alpha_i(0) = \widetilde{\gamma}_i(1)$ をみたすものは

$$\alpha_i(t) = \widetilde{\gamma}_i^{-1}(t) := \widetilde{\gamma}_i(1-t)$$

であることを示せ.

(2) $\widetilde{\gamma}_0(1) \neq \widetilde{\gamma}_1(1)$ を示せ.（ヒント：持ち上げの一意性を使って背理法で示す）

【演習問題】簡単のため，位相空間は単体複体の多面体のような「よい空間」であるとする．

1. $\Delta := \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times X$ を**対角集合** (diagonal set) とよぶ．X が Hausdorff であるとき，$\Delta \subset X \times X$ は閉集合であることを示せ.（ヒント：$X \times X \setminus \Delta$ が開集合である，つまり $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ の開近傍 U を $U \subset X \times X \setminus \Delta$ となるよう取れることを言えばよい）

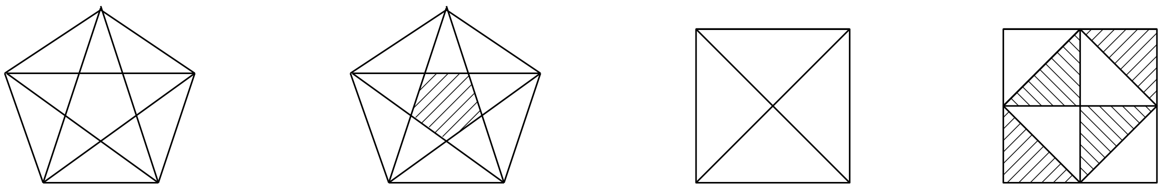
2. $p : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像とし，$x \in U \subset X$ を許容的 (admissible) かつ連結な開近傍とする．また $h \in \mathcal{G}(\widetilde{X}, p)$ を被覆変換とする．
   (1) $h(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$ であり，$h|_{p^{-1}(x)}$ は全単射であることを示せ.
   (2) $p^{-1}(U) = \bigcup_\lambda V_\lambda$, 各 V_λ は互いに交わらない開集合で $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ は同相とする．任意の $\widetilde{y} \in V_\lambda$ に対し，$h(\widetilde{y}) \in V_\mu$ となる μ が存在することを示せ.
   (3) $h|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\mu$ が定義され同相写像であることを示せ.

3. 関数 $y = \sin(2\pi/x)$ $(0 < x \leq 1)$ のグラフを Γ とする．また，連続な曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ で，$\gamma(0) = (1, 0) \in \Gamma$, $\gamma(1) = (0, 1)$, $\gamma(t) \notin \Gamma$ $(0 < t \leq 1)$ をみたすものを取り，その像を $Y := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ とおく．$X := \Gamma \cup Y$ に $\mathbb{R}^2$ から相対位相を入れたとき，X は弧状連結であるが，$(0, 1) \in X$ において局所弧状連結ではないことを示せ.

※以下は今までの復習です.

4. $w_0 = (0, 0)$, $w_1 = (2, 0)$, $w_2 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ とする．
   (1) K を三つの 1 単体 $|w_0 w_1|$, $|w_1 w_2|$, $|w_2 w_0|$ からなるグラフとし，L を $|w_0 w_1|$ のみからなるグラフとする．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x, y) := (x, 0)$ で定義すると，f の制限は連続写像 $f : |K| \to |L|$ を導く．f は単体写像 Φ を使って $f = |\Phi|$ とは表されないことを示せ.
   (2) f の単体近似 $\Phi : K \to L$ を一つ構成し，それが実際に単体近似であることを示せ.

5. 次の図形の基本群を求めよ．線分の交わりは全て頂点であり，斜線部のみ内部も含む．



6. 正方形（内部も含む）の向かい合う辺を向きを逆にして同一視して得られる空間を X とする．$\pi_1(X)$ を求めよ．

7. (1) $T := S^1 \times S^1$ とおく．$\pi_1(T)$ を求めよ．

   (2) $x_0 := (1,0) \in S^1$ とする．$S^1 \times \{x_0\}$ で表される T 上のループを考え，このループと円板 D の境界を貼り合わせて得られる空間を $T' := T \cup D$ とおく．$\pi_1(T')$ を求めよ．

8. $K := K_1 \cup K_2$, $K_0 := K_1 \cap K_2$ に対して van Kampen の定理を使うとき，K_0 の弧状連結性は必要である．このことを次の例で見てみる．

   (1) $K := S^1$（の単体分割）とし，$K_1 := \{(x,y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$, $K_2 = \{(x,y) \in S^1 \mid y \leq 0\}$ とおく．$\pi_1(K_i)$ $(i = 1,2)$ を求めよ．

   (2) 弧状連結でない空間の基本群は，基点をどの連結成分から取るかで変化し得るが，$K_0 = \{(\pm 1, 0)\}$ の場合は基点の取り方によらず $\pi_1(K_0) = \{1\}$ である．van Kampen の定理を使えると仮定して $\pi_1(K)$ を求め，事実と異なる結果が得られることを確かめよ．

9. 空間 X, Y に対し，$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ であることを示せ．ただし $X \vee Y$ は X と Y の一点和を，$*$ は自由積を表す（12/10 の演習問題 4，1/7 の演習問題 6 参照）．

10. (1) 任意の空間 X に対し，$\mathrm{id} : X \to X$ は被覆空間であることを示せ．

    (2) $\pi_1(S^2) = \{1\}$ を示せ．

    (3) $\pi_1(S^2 \vee S^2)$ を求めよ．

    (4) $S^2 \vee S^2$ の普遍被覆を求めよ．

11. (1) $\pi_1(S^1 \vee S^2)$ を求めよ．

    (2) $S^1 \vee S^2$ の普遍被覆を求めよ．

演習問題のみ，1/30（水）頃に略解を掲載します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html