トポロジー 演習・レポート問題 14（2013 年 1 月 28 日）略解

担当：境 圭一

模範解答ではありません．書き方は各自検討すること．

【レポート問題】

(1) $p \circ \alpha_i = \gamma_i^{-1}$ と $\alpha_i(0) = \widetilde{\gamma}_i(1)$ を確かめる．

(2) $\widetilde{\gamma}_0(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$ と仮定する．これらの点を始点とする γ^{-1} の持ち上げは一意だから $\alpha_0 = \alpha_1$. すると $\widetilde{x}_0 = \widetilde{\gamma}_0(0) = \alpha_0(1) = \alpha_1(1) = \widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{x}_1$ となって仮定に矛盾する．

【演習問題】

1. $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ とは $x \neq y$ ということだから，X の Hausdorff 性より $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ であるような開集合 $U, V \subset X$ が存在する．このとき $U \times V$ は $X \times X \setminus \Delta$ における (x, y) の開近傍.

2. (1) $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$ とする．$p \circ h = p$ より $p(h(\widetilde{y})) = p(\widetilde{y}) = x$, よって $h(\widetilde{y}) \in p^{-1}(x)$ だから，$h|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ が定義される．h が同相であることを使うと $h|_{p^{-1}(x)}$ は全単射であることがわかる．

   (2) $y := p(\widetilde{y})$ とすると $y \in U$. $h(\widetilde{y}) \in p^{-1}(y) \subset p^{-1}(U)$ はある V_μ に含まれる．

   (3) $h(\widetilde{y}) = h(\widetilde{y}')$ とすると $p(h(\widetilde{y})) = p(h(\widetilde{y}'))$ $(= y)$. これと (1) から $\widetilde{y} = \widetilde{y}'$ がわかる．全射性も (1) からわかる．

3. $(0, 1)$ の開近傍 U をどれほど小さく取っても，U は $y = \sin(2\pi/x)$ の極大点を無数に多く含み，それらをちょうど一つずつ含むような $U \cap X$ の連結成分が存在する．よって U の中で連結な開集合を取り直すことはできない．

4. (1) もし $f = |\Phi|$ と表されたとすると，$f(w_2) = |\Phi|(w_2)$ は L の 0 単体になっているはず.

   (2) 例えば $\Phi(w_0) := w_0$, $\Phi(w_1) := w_1$, $\Phi(w_2) := w_0$ は単体写像で，f の単体近似である．

5. それぞれ F_{11}, F_{10}, F_4, F_4 に同型.

6. 12/25 の講義でやったような方法で計算すれば $\mathbb{Z}/2$ に同型であることがわかる．対角線で結ばれる頂点は同一視されるが，辺で結ばれる頂点は同一視されていないことに注意．定義をよく見れば $X = \mathbb{R}P^2$ であることがわかる．

7. (1) $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $(\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \rangle)$.

   (2) (1) の同型は，$S^1 \times \{x_0\}$ が表すループが g_1 に，$\{x_0\} \times S^1$ が表すループが g_2 に対応するように取れる．$T' = T \cup D$ に対し van Kampen の定理を使うと

$$\pi_1(T') \cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1},\ g_1 \rangle \cong \langle g_2 \mid \ \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

   注意. $\pi_1(T') \cong \pi_1(S^1)$ だが $T' \not\approx S^1$. 例えばホモロジー群を計算すればわかる．

8. $\pi_1(K_i) \cong \{1\}$ $(i=1,2)$. van Kampen の定理が使えるとすると $\pi_1(K) \cong \{1\}$ が得られるが，これは $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ という事実に反する．

9. van Kampen の定理による．$X, Y \subset X \vee Y$ の共通部分は一点だから基本群は自明．

10. (1) 任意の $x \in X$ に対し，その任意の開近傍 U は許容的 (admissible) である．例えば $U = X$ と取ってもよい．

    (2) 講義の例 10.4 参照．

    (3) 問題 9 により $\pi_1(S^2 \vee S^2) \cong \{1\}$.

    (4) (1) より $\mathrm{id}_{S^2 \vee S^2}$ は被覆写像．(3) より普遍被覆である．

11. (1) 問題 9 と問題 10. (2) より $\pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \mathbb{Z}$.

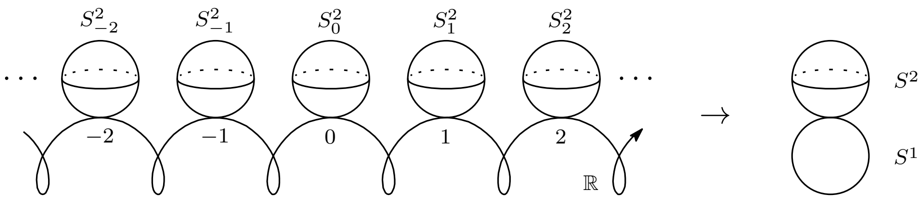
    (2) 普遍被覆 $p : \widetilde{X} \to S^1 \vee S^2$ の被覆変換群 $\mathcal{G}(\widetilde{X}, p)$ は $\pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \mathbb{Z}$ に同型．$\mathbb{R} \to S^1$ の例を思い出すと，集合として $p^{-1}(x) \cong \mathbb{Z}$ であるような被覆を考えればよさそうである．実際それは正しい：

    $S^1 \vee S^2$ において接着している一点が $e^{2\pi i \cdot 0} = 1 \in S^1$ と $z := (0,0,1) \in S^2$ であったとする．S^2 を「$\mathbb{Z}$ 個」用意し，区別のため S^2_n $(n \in \mathbb{Z})$ と書く．$z_n := (0,0,1) \in S^2_n$ とし，$\widetilde{X}$ として $\mathbb{R}$ の各整数点 $n \in \mathbb{R}$ と $z_n \in S^2_n$ を貼り合わせたものを取り，$p : \widetilde{X} \to S^1 \vee S^2$ を

$$p(x) := \begin{cases} e^{2\pi i x} \in S^1, & x \in \mathbb{R} \text{ のとき} \\ x \in S^2, & x \in S^2 \text{ のとき} \end{cases}$$

    と定義すると，p は被覆写像になっていることが確かめられる．

    さらに van Kampen の定理を「無限回」適用すれば $\pi_1(\widetilde{X}) \cong \{1\}$ であることがわかりそうで，答案としてはそれで十分であろうが,「無限回」の操作が許されるかは明らかではない．もう少し正確には次のようにするのが良いと思われる．$\widetilde{X}$ は無限個の S^2 のブーケとホモトピー同値である：$\widetilde{X} \simeq \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^2_n$. 接着点 x_0 を基点とする．x_0 を基点とする $\bigvee_n S^2_n$ のループ γ は $S^2_{n_1}, \ldots, S^2_{n_k}$（有限個）のループ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ の合成で表されるが，$\pi_1(S^2) \cong \{1\}$ より，それらはいずれも定値ループと（基点 x_0 を止めて）ホモトピックである．従って γ 自身も定値ループにホモトピックとなる．よって $\pi_1\left(\bigvee_n S^2_n\right) \cong \{1\}$.



参考書の演習問題 9.1 も参照せよ．