

## トポロジー 追加レポート問題 (5) について

担当：境 圭一

中間試験の 1. (4) ならびに今回の (5) に関して混乱があり，お詫びいたします．何が問題だったかを整理しておきます．

今回の (4) で  $Z \simeq \{*\}$  を示すのに使ったであろうホモトピー

$$F : Z \times I \rightarrow Z, \quad F((4 \cos \theta, 2 \sin \theta), s) := (4 \cos(s\theta), 2 \sin(2\theta)) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を考えます．(5) では，気持ちとしては “ $G(t, s) := F(\gamma(t), s)$ ” を考えたいわけです．つまり， $Z$  が可縮なのだから， $Z$  に入っているループ  $\gamma$  も一緒につぶれる，と言いたいわけです． $F$  を定義するに当たっては，極座標の「楕円版」 $(4 \cos \theta, 2 \sin \theta)$  を使っています．一方，ループ  $\gamma$  の定義は

$$\gamma(t) := (4 \cos 4\pi t, 2 |\sin 4\pi t|)$$

でした．これは絶対値が入っているので，極座標（楕円版）を使った表記にはなっていません．このことが原因で

$$“G(t, s) = F(\gamma(t), s) = (4 \cos(s \cdot 4\pi t), 2 |\sin(s \cdot 4\pi t)|)”$$

としてしまうと定義に矛盾が生じます ( $\gamma(0) = \gamma(1)$  だが  $F(\gamma(0), s) \neq F(\gamma(1), s)$ )．正しくは

$$\gamma(t) = (4 \cos \theta(t), 2 \sin \theta(t))$$

と 絶対値を使わずに 表記されるような  $t$  の関数  $\theta(t)$  を取り

$$G(t, s) = (4 \cos(s\theta(t)), 2 \sin(s\theta(t))) \quad (1)$$

とおけば曖昧さなく定義されます．

問題は  $\theta(t)$  の具体的な形ですが， $\gamma(t)$  は  $y$  座標が正ですから， $0 \leq \theta(t) \leq \pi$  をみたくように取れます．詳しく言うと

$$\theta(t) = \begin{cases} 4\pi t & 0 \leq t \leq 1/4 \\ 4\pi((1/2) - t) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ 4\pi(t - (1/2)) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ 4\pi(1 - t) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

です． $\theta(t)$  の値は  $0$  と  $\pi$  の間を二往復していることが見て取れます．これを使って (1) のように  $G(t, s)$  を定義すれば， $G$  は連続で， $\gamma$  と  $c$  の間の基点を止めたホモトピーになっています．

