トポロジー 中間試験（2012 年 11 月 26 日）

担当：境 圭一

- 答案用紙は 2 枚あります（A3 両面）．両方に学籍番号と名前を記入してください．
- 大問ごとに指定された箇所に解答してください．
- 終了後は答案用紙 No. 1, No. 2 ごとに学籍番号順になるよう回収します．速やかな回収にご協力をお願いします．
- 計算用紙 1 枚 (A4) は提出不要です．
- 配点は問題下部に記載されています．
- 試験開始後 30 分以内の退出，30 分経過後の入室は不可とします．
- 終了後に略解を配布します．下記 URL にも掲載します．

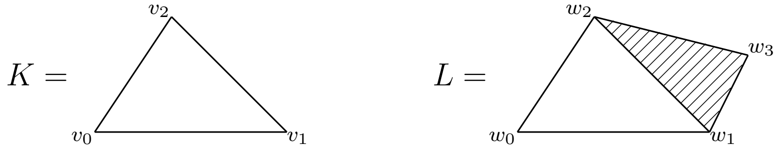
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html`

【問題】以下，$I := [0,1]$, $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, $x_0 := (1,0) \in S^1$ とする．

1. (1) 包含写像 $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ．
   (2) $c : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $c(x,y) := \mathbf{0}$（$\mathbb{R}^2$ の原点）で定まる定値写像とする．$f \simeq c$ であることを示せ．
   (3) $X := \{(x,y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$ とおく．X は可縮であることを示せ．
   (4) ループ $\gamma : (I, \partial I) \to (S^1, x_0)$ を $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, |\sin 2\pi t|)$ で定義する．x_0 への定値写像を $c : (I, \partial I) \to (S^1, x_0)$ と書くとき，$\gamma \simeq c \text{ rel } x_0$ であることを示せ．

2. $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の点 $v_0 = (1,0,\ldots,0)$, $v_1 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $v_n = (0,\ldots,0,1)$ を考える．つまり v_i は第 $(i+1)$ 座標が 1 で，他は全て 0 であるような点である．
   (1) $v_0, \ldots, v_n$ は一般の位置にあることを示せ．
   (2) $\Delta^n := |v_0 \ldots v_n|$ とおく．$n = 0,1,2$ に対し $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を図示せよ．
   (3) Δ^n の k-面単体の数 b_k $(0 \leq k \leq n)$ を n と k の式で表せ．
   (4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b_k$ を n の式で表せ．

3. K, L を下図のような単体複体とする．K は 2 単体を含まず，L の 2 単体は $|w_1 w_2 w_3|$ のみである．$K^{(0)}$, $L^{(0)}$ をそれぞれの 0 単体の集合とする．
   (1) L の重心細分 $D(L)$ を図示せよ．
   (2) $\Phi : K^{(0)} \to L^{(0)}$ を $\Phi(v_i) := w_i$ $(i = 0,1,2)$ で定義する．Φ は単体写像であることを示せ．
   (3) w_0 を基点とする L の任意のループは，w_3 を含まないループと同値であることを示せ．
   (4) (2) より，K の任意のループ $\eta := \overrightarrow{v_0 v_{i_1} \ldots v_{i_k} v_0}$ $(i_1, \ldots, i_k = 0,1,2)$ に対し
   $$\Phi_*(\eta) := \overrightarrow{\Phi(v_0)\Phi(v_{i_1}) \ldots \Phi(v_{i_k})\Phi(v_0)}$$
   は L のループを定め，準同型 $\Phi_* : \pi_1(K, v_0) \to \pi_1(L, w_0)$ を導く（証明不要）．Φ_* は同型写像であることを示せ．ただし，$\Psi : L^{(0)} \to K^{(0)}$ を $\Psi(w_i) := v_i$ $(i = 0,1,2)$, $\Psi(w_3) := v_1$ で定めると Ψ は単体写像であることは使ってよい．



4. トーラス $T := S^1 \times S^1$ の基点を $y_0 := (x_0, x_0)$ とする．T 上のループ $\gamma_1, \gamma_2 : (I, \partial I) \to (T, y_0)$ を，それぞれ $\gamma_1(t) := ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), x_0)$, $\gamma_2(t) := (x_0, (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ で定め，$\alpha := [\gamma_1]$, $\beta := [\gamma_2] \in \pi_1(T, y_0)$ とおくとき，$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$ を示せ．

配点：**1**: $3+4+4+4=15$,　**2**: $3+4+4+4=15$,　**3**: $3+4+4+4=15$,　**4**: 5,
計 50 点満点