トポロジー 中間試験（2012年11月26日）略解

担当：境 圭一

1. (1) 10/1 のレポート問題参照.

   (2) 10/15 の演習問題 1 参照.

   (3) $i : \{x_0\} \to X$ を $i(x_0) := x_0$ で定め，$p : X \to \{x_0\}$ を定値写像とすると $p \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$. $F : X \times I \to X$ を，例えば

$$F((\cos\theta, \sin\theta), s) := (\cos(s\theta), \sin(s\theta)) \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

   で定めると F は連続で，$F((x,y),0) = x_0 = i \circ p(x,y)$, $F((x,y),1) = (x,y) = \mathrm{id}_X(x,y)$ だから $i \circ p \simeq \mathrm{id}_X$.

   (4) (3) の X に対し，$\gamma(t) \in X$ であることに注意する．$G : I \times I \to S^1$ を，例えば

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & 0 \le t \le 1/2 \\ (\cos 2\pi(1-t), \sin 2\pi(1-t)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

   という表記のもとで，(3) の F を使って

$$G(t,s) := F(\gamma(t), s)$$

   で定めると G は連続で，$G(t,0) = x_0 = c(t)$, $G(t,1) = \gamma(t)$, また F の定義から $G(0,s) = F(x_0, s) = (\cos(s \cdot 0), \sin(s \cdot 0)) = x_0$, 同様に $G(1,s) = x_0$.

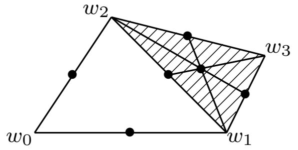
2. (1), (2), (3)：11/5 の演習問題 2 参照．$b_k = \dbinom{n+1}{k+1}$.

   (4) (3) より二項定理の式を $(1+x)^{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^{k+1}$ と書ける．$x = -1$ とおけば

$$0 = 1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k = 1 - (-1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b_k.$$

   最後の等号は $b_n = 1$ による．よって求める値は $1 - (-1)^n$.

3. (1) 図の通り．● は全て単体の重心.

$D(L) =$ 

   (2) K の 0 単体 $|v_i|$ $(i = 0,1,2)$ に対し $\Phi(v_i) = w_i$ は L の 0 単体の頂点．また K の 1 単体 $|v_i v_j|$ $(0 \le i < j \le 2)$ に対し $\{\Phi(v_i), \Phi(v_j)\} = \{w_i, w_j\}$ は L の 1 単体 $|w_i w_j|$ の頂点.

   (3) L のループ η が $\ldots w_1 w_3 w_2 \ldots$ または $\ldots w_2 w_3 w_1 \ldots$ という部分を含むとき，L に 2 単体 $|w_1 w_2 w_3|$ があることから，η はこの部分を $\ldots w_1 w_2 \ldots$ または $\ldots w_2 w_1 \ldots$ に変えたものと 2-同値．また $\ldots w_i w_3 w_i \ldots$ $(i = 1,2)$ を含む場合は，簡約により η はこの部分を $\ldots w_i \ldots$ に変えたものと同値.

(4) Ψ も単体写像だから，準同型 $\Psi_* : \pi_1(L, w_0) \to \pi_1(K, v_0)$ が定まる．(3) より，L の任意のループ η に対し

$$[\eta] = [\overrightarrow{w_0 w_{i_1} \dots w_{i_k} w_0}] \in \pi_1(L, w_0) \quad (i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2)$$

という表示ができるから，Φ, Ψ の定義より

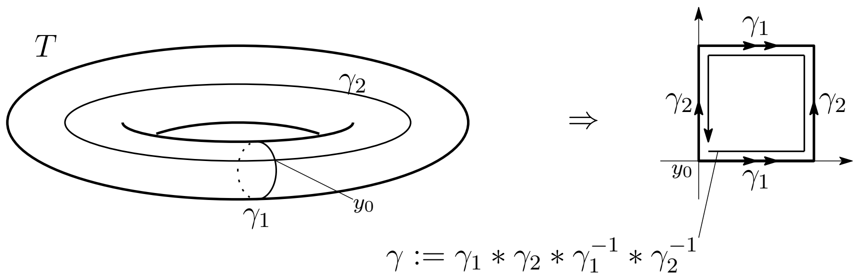
$$\Phi_* \Psi_*([\eta]) = \Phi_*([\overrightarrow{v_0 v_{i_1} \dots v_{i_k} v_0}]) = [\overrightarrow{w_0 w_{i_1} \dots w_{i_k} w_0}] = [\eta]$$

となって $\Phi_* \Psi_* = \mathrm{id}_{\pi_1(L, w_0)}$．同様に $\Psi_* \Phi_* = \mathrm{id}_{\pi_1(K, v_0)}$ がわかり，Φ_* は同型写像で逆写像が Ψ_* であることがわかる．

4. γ_1, γ_2 に沿って切り開くことにより，T は正方形の向かい合う辺をそれぞれ同じ向きで貼り合わせたものとみなせる．$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ を表すループ $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_1^{-1} * \gamma_2^{-1}$ は，この正方形の辺に沿って一周するループ（これを γ とおく）で表される．このとき $F : I \times I \to T$ を，y_0 を原点とするような $\mathbb{R}^2$ の座標を使って

$$F(t, s) := (1 - s)\gamma(t)$$

で定めると F は連続で，$F(t, 0) = \gamma(t)$, $F(t, 1) = y_0$（定値ループ），$F(0, s) = y_0 = F(1, s)$ なので $\gamma \simeq c \text{ rel } (0, 0)$, 従って $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \in \pi_1(T, y_0)$.



補足.

1. (3) F は半円 X に沿って「左側からつぶしていく」ホモトピー．
   (4) $\gamma(t) \in X$ であることから，X が「つぶれる」のと一緒に γ もつぶせる．10/29 の演習問題 4 も参照.
2. (4) 「n が偶数のとき 0, 奇数のとき 2」も正解．この値は S^{n-1} の **Euler 標数**と呼ばれる値である．詳しくは「ホモロジー論」で学ぶ，と思います.
4. 基本群は一般に非可換群だが，この問題の α, β については $\alpha\beta = \beta\alpha$ であることがわかる．事実としては $\pi_1(T, y_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$（可換群）.

配点：**1**: $3 + 4 + 4 + 4 = 15$, **2**: $3 + 4 + 4 + 4 = 15$, **3**: $3 + 4 + 4 + 4 = 15$, **4**: 5,
計 50 点満点
下記 URL にも掲載しておきます.
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html`