【問題】 以下，$I := [0,1]$ とする．$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ は断りなく用いてよい．

1. $\sigma := |v_0 v_1|$ を 1 単体とする．また $w_0 = (0,0)$, $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (1,1)$, $w_3 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ とし，K を 2 単体 $|w_0 w_1 w_3|$, $|w_1 w_2 w_3|$ とその面単体からなる単体複体とする（下図参照）．

   (1) 重心細分 $D(\sigma)$, $D(K)$ を図示せよ．

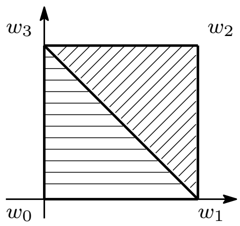
   (2) 多面体 $|K|$ を $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ と自然に同一視し，連続写像 $f : |\sigma| \to |K|$ を次で定義する：

   $$f((1-t)v_0 + tv_1) := (t,t) \in |K| \quad (0 \le t \le 1)$$

   f の単体近似 $\Phi : D(\sigma)^{(0)} \to K^{(0)}$ を構成し，それが f の単体近似であることを示せ．

   (3) K から $|w_0 w_1 w_3|$ の内部 $\mathrm{Int}\,|w_0 w_1 w_3|$ を取り除いた単体複体を K' とする．$\pi_1(|K'|)$ を求めよ．

   (4) K' からさらに $\mathrm{Int}\,|w_1 w_2 w_3|$ を取り除いた単体複体を K'' とする．$\pi_1(|K''|)$ を求めよ．

$K=$ 

2. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなす．$p : \mathbb{R} \to S^1$ を $p(x) := e^{2\pi i x}$ で定義すると，p は被覆写像である．

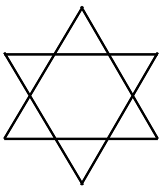
   (1) $-1 \in S^1$ に対し，集合の全単射 $p^{-1}(-1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ を構成せよ．

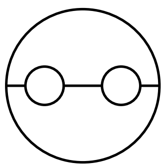
   (2) $n \in \mathbb{Z}$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に対し，$\gamma_x : I \to S^1$ を $\gamma_x(t) := e^{2\pi i(nt+x)}$ で定義する．γ_x の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_x : I \to \mathbb{R}$ で $\widetilde{\gamma}_x(0) = x$ をみたすものを求めよ．

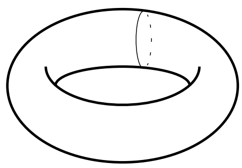
   (3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(x) := \widetilde{\gamma}_x(1)$ で定義する．h を求め，h は被覆変換であることを示せ．

   (4) $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ であるとき，n を求めよ．

3. 以下の空間の基本群を求めよ．G_1, G_2 はグラフ，T は閉曲面 $S^1 \times S^1$ である．

   (1) $G_1 =$ 

   (2) $G_2 =$ 

   (3) $T =$ 

4. (1) $\pi_1(S^2) \cong \{1\}$ を示せ．

   (2) $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2$ を示せ．自然な射影 $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ が被覆写像であることを使ってもよい．

   (3) $\pi_1(S^2 \vee \mathbb{R}P^2)$ を求めよ．ただし $\vee$ は一点和を表す．

   (4) $S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ 上の普遍被覆 (universal cover) $\widetilde{X} \to S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ を構成せよ．被覆であることの証明は省いてよい．

配点：**1**: $3+4+4+4=15$, **2**: $4+4+4+3=15$, **3**: $3+3+4=10$, **4**: $2+3+2+3=10$,
計 50 点満点