トポロジー 期末試験（2013 年 2 月 4 日）略解

担当：境 圭一

1. (1) 12/3 の演習問題 6 参照.

   (2) 12/3 のレポート問題参照．$\Phi(\hat{\sigma}) = w_1$ の代わりに $\Phi(\hat{\sigma}) = w_3$ でも差し支えない.

   (3) $|K'| \simeq S^1$ だから $\pi_1(|K'|) \cong \mathbb{Z}$. 取り除くのは $|w_0w_1w_3|$ の内部だから，辺 $|w_0w_1|$, $|w_0w_3|$ は残ることに注意.

   (4) $|K''| \simeq S^1 \vee S^1$ だから $\pi_1(|K''|) \cong F_2$（ただし F_n は階数 n の自由群）.

2. (1) $-1 = e^{\pi i} = e^{2\pi i\cdot(1/2)}$ である．$p^{-1}(-1) = \{(1/2) + n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

   (2) $\widetilde{\gamma}_x(t) = nt + x$.

   (3) $h(x) = n + x$. 1/21 のレポート問題，演習問題 1 参照.

   (4) $h(x) = n + x = x$ となるのは $n = 0$ のとき.

3. $G_1 \simeq (S^1)^{\vee 7}$, $G_2 \simeq (S^1)^{\vee 4}$ だから，$\pi_1(G_1) \cong F_7$, $\pi_1(G_2) \cong F_4$. また $\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

4. (1) S^2 を二つの円板（「北半球」と「南半球」）を貼り合わせたものとみて van Kampen の定理を使うと $\pi_1(S^2) \cong \{1\}$. 講義の例 10.4 や，11/12 の演習問題 3 も参照のこと.

   (2) (1) より $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ は普遍被覆であるから $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathcal{G}$, ただし $\mathcal{G}$ は p の被覆変換群．講義の例 12.7 (ii) でみたようにすれば，$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}/2$ がわかる.

   van Kampen の定理を使ってもよい．12/25 のレポート・演習問題，1/28 の演習問題 6 など参照.

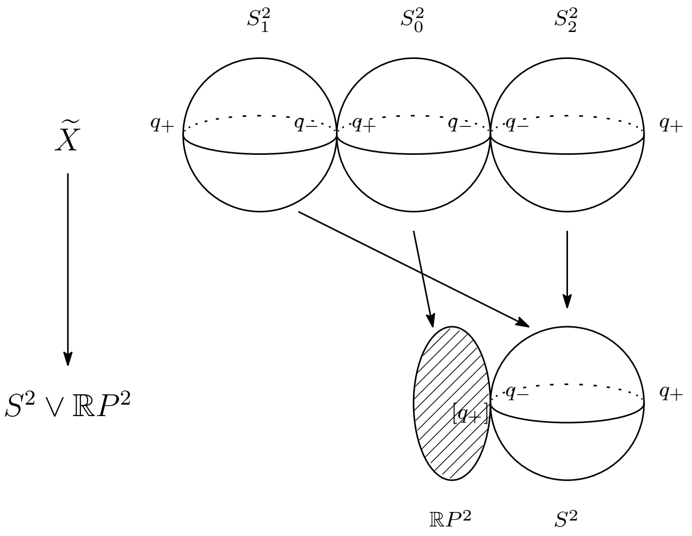
   (3) (1), (2) と van Kampen の定理より $\pi_1(S^2 \vee \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2$.

   (4) (3) より被覆変換群が $\mathbb{Z}/2$ であるような被覆を作ればよく，各 $x \in S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ に対し $\rho^{-1}(x)$ が二点集合であるような被覆 $\rho : \widetilde{X} \to S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ を作ればよさそうである．実際には次のようにすればよい：

   $q_\pm := (0, 0, \pm 1) \in S^2$ とし，$S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ において接着している一点が $q_- \in S^2$ と $[q_+] = [q_-] \in \mathbb{R}P^2$ であったとする．S^2 を三つ用意し，区別のため S^2_i $(i = 0, 1, 2)$ と書く．$q_+ \in S^2_0$ と $q_- \in S^2_1$, $q_- \in S^2_0$ と $q_- \in S^2_2$ をそれぞれ貼りつけた空間を $\widetilde{X}$ とする（図を参照のこと）．$\rho : \widetilde{X} \to S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ を

$$\rho(x) := \begin{cases} [x] \in \mathbb{R}P^2 & x \in S^2_0, \\ x \in S^2 & x \in S^2_i \ (i = 1, 2) \end{cases}$$

   とおく．$[q_+] = [q_-]$ だから ρ は連続写像で，$\rho : \widetilde{X} \to S^2 \vee \mathbb{R}P^2$ は被覆空間になっている．(1) と van Kampen の定理を二度使えば $\pi_1(\widetilde{X}) \cong \{1\}$ であることがわかる.



配点：**1**: $3+4+4+4=15$, **2**: $4+4+4+3=15$, **3**: $3+3+4=10$, **4**: $2+3+2+3=10$,
計 50 点満点

下記 URL にも掲載しておきます.

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/12_topology/12_topology.html`