位相空間論 演習・レポート問題 1（2013 年 9 月 27 日）

担当：境 圭一

【レポート問題】（10/4 の講義開始までに提出してください）

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (1 \le i \le n)\}$ とする．$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

と定める．d は $\mathbb{R}^n$ 上の**距離**であること，つまり次のことを示せ：

(D1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge 0$ であり，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(D2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(D3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.（ヒント：$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|$ と考えよ）

【演習問題】（提出の必要はありません）

1. 以下の $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，いずれも $\mathbb{R}^n$ 上の距離（レポート問題 (D1)〜(D3) 参照）になることを示せ．

   (1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{\sum_{1 \le i \le n} (x_i - y_i)^2}$（注：この距離を入れた距離空間 $\mathbb{R}^n$ を **Euclid 空間**と呼ぶ）

   (2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{\sum_{1 \le i \le n} a_i (x_i - y_i)^2}$, ただし a_i $(1 \le i \le n)$ は正の定数

   (3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$

   $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ を原点とする．(1)〜(3) それぞれについて，$U(\mathbf{0}; 1) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) < 1\}$ を図示せよ．

2. $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $d(x, y) := \left|x^2 - y^2\right|$ とおく．この d は距離の条件 (D2), (D3) はみたすが (D1) をみたさないことを示せ（従ってこの d は $\mathbb{R}$ 上の距離ではない）．一般に，n を自然数とし $d(x, y) := |x^n - y^n|$ とおくとき，d が $\mathbb{R}$ 上の距離になるための n に関する必要十分条件を求めよ．

3. X を任意の集合とする．$x, y \in X$ に対し

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \ne y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

   と定義すると，d は X 上の距離となることを示せ．この距離を**離散距離**とよぶ．

4. $X = \{x, y, z\}$ を三点からなる集合とし，

$$d(x, x) = d(y, y) = d(z, z) = 0, \quad d(x, y) = d(y, x) := a, \quad d(y, z) = d(z, y) := b, \quad d(z, x) = d(x, z) := c$$

   とおく．d が X 上の距離であるための必要十分条件は

$$a, b, c > 0 \quad \text{かつ} \quad |a - b| \le c \le a + b$$

   （つまり，a, b, c を三辺の長さとする三角形が存在すること）であることを示せ．

5. $X_1, \dots, X_n$ を集合とし，それぞれの上に距離 $d_1, \dots, d_n$ が定義されているとする．このとき，**直積集合**

$$X := X_1 \times \cdots \times X_n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\ (1 \le i \le n)\}$$

   の二点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i)$$

   と定めると，d は X 上の距離になることを示せ．（注：問題 1. (3) は $X_i = \mathbb{R}$, $d_i(x, y) = |x - y|$ の場合）

6. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V 上に内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}$ $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V)$ が定まっているとする．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ に対し $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=\sqrt{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})}$ と定めると，d は V 上の距離になることを示せ．

7. 講義で扱った集合 $A:=[0,2]$, $B:=[0,1)\cup[2,3]$ を考える．

   (1) 写像 $f:A\to B$ を
   $$f(x):=\begin{cases}x & x<1,\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$$
   で定義する．f は全単射であることを示せ．

   (2) $a,a'\in A$ に対し，$d_A(a,a'):=|a-a'|$ とおく．また $b,b'\in B$ に対し
   $$d'_B(b,b'):=\begin{cases}|b-b'| & b,b'<1,\ \text{または}\ b,b'\geq 2,\\ |b-b'|-1 & b<1,\ b'\geq 2,\ \text{または}\ b'<1,\ b\geq 2\end{cases}$$
   と定義する．d_A, d'_B はそれぞれ A,B 上の距離であることを示せ．

   (3) $a_n\in A$ は $a_n<1$, $d_A(a_n,1)\to 0$ $(n\to\infty)$ をみたす数列とする．$d'_B(f(a_n),f(1))\to 0$ $(n\to\infty)$ であることを示せ.（つまり f は距離 d'_B については「距離を保つ」といえる）

8. X を $[0,1]$ に値を持つ数列全体の集合とする．つまり
   $$X:=\{\boldsymbol{a}=\{a_n\}_{n\geq 1}\mid 0\leq a_n\leq 1\ (\forall n)\}.$$
   $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in X$ に対し，$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}):=\sup_{n\geq 1}|a_n-b_n|$ が定義でき，X 上の距離となることを示せ.

9. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体の集合
   $$C[0,1]:=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f\ \text{は連続関数}\ \}$$
   を考える．$f,g\in C[0,1]$ に対し
   $$d(f,g):=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$
   が定義でき，$C[0,1]$ 上の距離になることを示せ．ただし，$f,g\in C[0,1]$ に対し $f=g$ とは，任意の $x\in[0,1]$ に対し $f(x)=g(x)$ が成り立つことである．

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は狭義単調減少関数で $f(x)>0$ をみたすとする．群 G の部分群の列 $G=G_1>G_2>G_3>\cdots$ で
    $$\bigcap_{n\geq 1}G_n:=G_1\cap G_2\cap G_3\cap\cdots=\{e\}$$
    （ただし e は G の単位元）となるものが与えられたとする．$a,b\in G$ に対し，
    $$d(a,b):=\begin{cases}f(n) & ab^{-1}\in G_n\ \text{だが}\ ab^{-1}\notin G_{n+1}\ \text{となる}\ n\ \text{が存在する}\\ 0 & \text{任意の}\ n\ \text{に対し}\ ab^{-1}\in G_n\end{cases}$$
    とおく．d は G 上の距離であることを示せ.

11. $X=\{\text{cat, dog, }\ldots\}$ を 3 個のアルファベットからなる英単語全体の集合とする．$w_1,w_2\in X$ の 1,2,3 文字目をそれぞれ比べ，異なるアルファベットの数を $d(w_1,w_2)$ とおく．例えば $d(\text{dig, dog})=1$, $d(\text{cat, dog})=3$, $d(\text{dog, end})=3$. d は X 上の距離であることを示せ．この距離と問題 3，問題 5 の関係を考えよ．
    （注：この距離を**ハミング距離** (Hamming distance, signal distance) と呼ぶ．文字数 3 であることは本質的でない.）