位相空間論 演習問題 2（2013 年 10 月 4 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ 上では Euclid 距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ を考える．

1. (1) 任意の $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ と $\epsilon>0$ に対し
$$U(\boldsymbol{a};\epsilon) := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\epsilon\} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid (x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2<\epsilon^2\}$$
は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (open set) であることを示せ．（わかりにくければ $n=2$ として考えよ）

   (2) $\overline{U(\boldsymbol{a};\epsilon)} := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\le\epsilon\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合 (closed set) であることを示せ．

2. (X,d) を距離空間とする．

   (1) 任意の $a\in X$ と $\epsilon>0$ に対し，$U(a;\epsilon):=\{x\in X \mid d(x,a)<\epsilon\}$ は X の開集合であることを示せ．

   (2) 任意の $a\in X$ に対し，一点からなる集合 $\{a\}$ は X の閉集合であることを示せ．

   (3) A を X の部分集合とする．$x\in X$ が A の内点であるとき，$x\in A$ であることを示せ．また $y\in X$ が A の外点であるとき，$y\in A^c$（つまり $y\notin A$）であることを示せ．

   (4) A の内点 x は，A の触点でもあることを示せ．

3. $O_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<4\}$, $O_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2+y^2<9\}$ とおく．問題 1, 2 より，O_1, O_2 は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

   (1) O_1, O_2 と $O_1\cap O_2$ を図示せよ．

   (2) $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in O_1\cap O_2$ とする．$U(\boldsymbol{a};\delta_i)\subset O_i$ となるような $\delta_i>0$ $(i=1,2)$ をひとつずつ見つけよ．

   (3) $U(\boldsymbol{a};\delta)\subset O_1\cap O_2$ となる $\delta>0$ をひとつ見つけよ．（よって $O_1\cap O_2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である）

4. (1) $A:=[0,1)\subset\mathbb{R}$ とする．A は $\mathbb{R}$ の開集合か？また閉集合か？（ヒント：$0,1$ は A, A^c の内点か？）

   (2) $1\in\mathbb{R}$ は A の (i) 内点か？(ii) 外点か？(iii) 境界点か？(iv) 触点か？(v) 集積点か？(vi) 孤立点か？

5. $X:=\{-1\}\cup[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-1, \text{または } 0\le x<\infty\}$ とおき，その部分集合 $A:=[0,\infty)$ を考える．X 上の距離を $d(x,y):=|x-y|$ で定める．

   (1) $0\in X$ は A の内点であることを示せ．（従って問題 2. (4) より A の触点でもある）

   (2) $0\in X$ は A の境界点ではないことを示せ．

6. (1) 自然数 n に対し $a_n:=\frac{1}{n}$ とおき，$A_n:=\{a_1,\dots,a_n\}\subset\mathbb{R}$ とおく．A_n は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．（ヒント：任意の $x\in(A_n)^c$ に対し $\delta:=\min\{|x-a_1|,\dots,|x-a_n|\}>0$ とおいて $U(x;\frac{\delta}{2})$ を考えよ）

   (2) $A_\infty=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ とおく．A_∞ は $\mathbb{R}$ の閉集合か？（ヒント：$0\in(A_\infty)^c$ は $(A_\infty)^c$ の内点か？）

7. (1) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ に対し，$(a,b)\subset\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．また $a\le b$ に対し，$[a,b]\subset\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．

   (2) $U_n:=(-\frac{1}{n},1)$ とおく．$U:=\displaystyle\bigcap_{n\ge1}U_n$ を具体的に求めよ．U は $\mathbb{R}$ の開集合か？

   (3) $A_n:=[\frac{1}{n},1]$ とおく．$A:=\displaystyle\bigcup_{n\ge1}A_n$ を具体的に求めよ．A は $\mathbb{R}$ の閉集合か？

8. d を集合 X 上の離散距離（前回の問題 3 参照）とする．

   (1) 任意の $x\in X$ は X の孤立点であることを示せ．

   (2) 任意の $x\in X$ に対し，一点からなる部分集合 $\{x\}\subset X$ は X の開集合であることを示せ．

   (3) 任意の部分集合 $A\subset X$ は X の開集合であることを示せ．

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 2（2013 年 10 月 4 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ を図示せよ．また，通常の Euclid 距離について A は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

（締切：10/11 の講義開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html