位相空間論 演習問題 3（2013 年 10 月 11 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$（の部分集合）上では Euclid 距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ を考える．

1. $\mathbb{R}$ の部分集合 $A := [a,b)$ を考える．
   (1) 任意の $a<x<b$ は A の内点であることを示せ．また任意の $y \leq a$ と $z \geq b$ は A の内点でないことを示せ．A の内部 A° を求めよ．
   (2) 任意の $a \leq x \leq b$ は A の触点であることを示せ．また任意の $y<a$ と $z>b$ は A の触点ではないことを示せ．A の閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

2. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<x<2,\ 0<y<2\}$, $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|<1\}$ とする．
   (1) A, B を図示せよ．A, B は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ．
   (2) $\overline{A}, \overline{B}$ ならびに $\overline{A \cap B}$ を求めよ．

3. (X_i, d_i) $(i=1,2)$ を距離空間とし，直積集合 $X := X_1 \times X_2$ 上の距離を
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \max(d_1(x_1,y_1), d(x_2,y_2))$$
で定める．$x_i \in X_i$ $(i=1,2)$ ならびに $x \in X$ の距離 d_i, d に関する δ 近傍を $U_{X_i}(x_i;\delta)$, $U_X(x;\delta)$ などと書く．
   (1) $x=(x_1,x_2) \in X$ に対し，$U_X(x;\delta) = U_{X_1}(x_1;\delta) \times U_{X_2}(x_2;\delta)$ であることを示せ．
   (2) $O_i \subset X_i$ $(i=1,2)$ が開集合であるとき，$O_1 \times O_2$ は X の開集合であることを示せ．
   (3) $F_i \subset X_i$ $(i=1,2)$ が閉集合であるとき，$F_1 \times F_2$ は X の閉集合であることを示せ．
   (4) 任意の部分集合 $A_i \subset X_i$ $(i=1,2)$ に対し，$(A_1 \times A_2)^\circ = A_1^\circ \times A_2^\circ$, $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ を示せ．

4. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ とする．
   (1) $A^\circ, \overline{A}$ を求めよ．
   (2) $B := \{(x,y) \in A \mid x<0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合か？
   (3) B は A の開集合か？

5. (X,d) を距離空間とし，X の開集合全体の集まりを $\mathscr{O}_d(X)$, X の閉集合全体の集まりを $\mathscr{A}_d(X)$ と書く．また $A \subset X$ とする．
   (1) A に含まれる開集合全体の和集合 $U := \bigcup_{O \in \mathscr{O}_d(X),\ O \subset A} O$ を考える．$U = A^\circ$ であることを示せ．
   (2) A を含む閉集合全体の共通部分 $V := \bigcap_{F \in \mathscr{A}_d(X), F \supset A} F$ を考える．$V = \overline{A}$ であることを示せ．

6. 自然数 n に対し $a_n := \frac{1}{n}$ とおき，$A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ とする．$\overline{A}$ を求めよ．

7. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ を有理数全体の集合とする．$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$（空集合），$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ であることを示せ．

8. $x>0$ に対し $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ とおく．$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．このグラフ $\Gamma := \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0\}$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とみなしたとき，閉包 $\overline{\Gamma}$ を求めよ．

9. d を集合 X 上の離散距離（9/27 の問題 3 参照）とする．任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，$A^\circ = A = \overline{A}$ であることを示せ．

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 3（2013 年 10 月 11 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U(\mathbf{0};1) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ の閉包 $\overline{U(\mathbf{0};1)}$ を求めよ．

（締切：10/18 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html