位相空間論 演習問題 4（2013 年 10 月 18 日）

担当：境 圭一

1. $X = \{a, b\}$ を 2 点からなる集合とする．次の部分集合族 $\mathscr{O}_i = \mathscr{O}_i(X)$ $(1 \leq i \leq 4)$ はいずれも X に**位相を定める**，つまり**開集合系の公理**

   (O1) $O_1, \ldots, O_n \in \mathscr{O}$（有限個）ならば $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \mathscr{O}$

   (O2) $O_\lambda \in \mathscr{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathscr{O}$

   (O3) $X, \emptyset \in \mathscr{O}$

   をみたすことを示せ．それぞれの位相について，閉集合系 $\mathscr{A} = \mathscr{A}(X)$ と，$a \in X$ の近傍系 $\mathscr{N}_a$ を求めよ．

   (1) $\mathscr{O}_1 := \{\emptyset, X\}$（密着位相）

   (2) $\mathscr{O}_2 := \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\mathscr{O}_3 := \{\emptyset, \{b\}, X\}$

   (3) $\mathscr{O}_4 := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \{X$ の全ての部分集合 $\}$

2. $\mathbb{R}^n$ 上の通常の Euclid 距離 d が定める位相 $\mathscr{O}$ を考える．つまり $\mathscr{O} := \{d$ が定める $\mathbb{R}^n$ の開集合全体 $\}$.

   (1) $U := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ は原点 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ の開近傍であることを示せ.

   (2) $V := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| < \frac{1}{2}\}$ とおく．V と $U \cap V$ は $\mathbf{0}$ の開近傍であることを示せ.

   (3) $A := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ は $\mathbf{0}$ の近傍であることを示せ.

   (4) A は $(1, 0, \ldots, 0)$ の近傍か？

3. 3 点からなる集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合族 $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ は開集合系の公理をみたすか？

4. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$x \in X$ に対し，$x \in U$ となる任意の $U \in \mathscr{O}$ は x の開近傍であることを示せ（つまり，$x \in O \subseteq U$ となる $O \in \mathscr{O}$ を見つけよ）．特に X は X の全ての点の開近傍であることを示せ.

5. 教科書 §4 の定理 1.4 (p. 89) を証明せよ.

6. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ で，教科書 §4 の定理 1.4 の性質 (A1)〜(A3) をみたすものが与えられたとする．このとき，$\mathscr{O} := \{F^c \mid F \in \mathcal{A}\}$ とおくと，$\mathscr{O}$ は開集合の公理 (O1)〜(O3) をみたすことを示せ.

7. X を任意の集合とする.

   (1) $\mathscr{O}_{\mathrm{discrete}} := \{X$ の全ての部分集合 $\}$ は X に位相を定めることを示せ．このような位相を**離散位相** (discrete topology) とよぶ．問題 1. (3) はその例である.

   (2) d を X 上の離散距離 (9/27 の演習問題 3), つまり $x = y$ のとき $d(x, y) := 0$, $x \neq y$ のとき $d(x, y) := 1$ とする．d が定める開集合族を $\mathscr{O}_d$ と書くとき，$\mathscr{O}_d = \mathscr{O}_{\mathrm{discrete}}$ であることを示せ.

8. (1) （教科書 §4 の演習問題 [1-2]）$a \in \mathbb{R}$ に対し $U_a := (-\infty, a) \subset \mathbb{R}$ とおく．また $U_{-\infty} := \emptyset$, $U_\infty := \mathbb{R}$ とおく．$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathscr{O} := \{U_a\}_{a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}$ は開集合系の公理をみたすことを示せ.

   (2) 任意の $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対し，$\bigcap_{k=1}^n U_{a_k}$ はいくらでも小さい実数を含む（つまり，下に非有界な）集合であることを示せ．また任意の $a_\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_{a_\lambda}$ も下に非有界な集合であることを示せ.

   (3) $-\infty < a < b$ とする．(a, b) は位相 $\mathscr{O}$ に関し開集合ではない（つまり $(a, b) \notin \mathscr{O}$ である）ことを示せ.

   (4) $\mathscr{O}' := \{U_a \mid a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}\}$ とおく．ただし $\mathbb{Z} := \{$ 整数全体 $\}$. $\mathscr{O}'$ は開集合系の公理をみたすことを示せ.

   (5) $\mathscr{O}'' := \{U_a \mid a \in \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}\}$ とおく．ただし $\mathbb{Q} := \{$ 有理数全体 $\}$. $\mathscr{O}''$ は開集合系の公理 (O1) と (O3) はみたすが (O2) をみたさないことを示せ. (従ってこの $\mathscr{O}''$ は $\mathbb{R}$ に位相を定めない)

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

位相空間論 レポート問題 4（2013 年 10 月 18 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^n$ 上の通常の Euclid 距離 d から定まる位相 $\mathscr{O} = \mathscr{O}_d$ を考える．$r \in \mathbb{R}$ に対し，$U_r := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq r\}$ とおく．位相 $\mathscr{O}$ に関し，U_r が原点 $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ の近傍であるような r の範囲を求めよ．

（締切：10/25 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html