位相空間論 演習問題 5（2013 年 10 月 25 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$X=(X,\mathscr{O})$ は位相空間，$A\subset X$ とする.（距離が定義されていることは仮定しない）

1. 内点や触点などの定義を使って，以下のことを示せ.

   (1) x が A の内点ならば $x\in A$ であることを示せ．また，$x\in A$ ならば x は A の触点であることを示せ.

   (2) $O\in\mathscr{O}$（つまり，O は X の開集合）のとき，任意の $x\in O$ は O の内点であることを示せ.

   (3) 逆に，任意の $x\in A$ が A の内点であるとき，$A\in\mathscr{O}$ であることを示せ.

   (4) A の内点 x に対し，定義より $x\in O\subset A$ となる $O\in\mathscr{O}$ が存在する．$O\subset A^\circ$ であることを示せ.

   (5) $A\subset B\subset X$ とする．$A^\circ\subset B^\circ$, $\overline{A}\subset\overline{B}$ であることを示せ.

   (6) $F\in\mathscr{A}$（つまり，F は X の閉集合）のとき，F の任意の触点 x は $x\in F$ をみたすことを示せ.

   (7) 逆に，A の任意の触点 x が $x\in A$ をみたすとき，$A\in\mathscr{A}$ であることを示せ.

   (8) 任意の $x\in X$ について，x が A の触点であることと，A の外点でないことは同値であることを示せ.

   (9) 任意の $x\in\overline{A}-A$ は A の集積点であることを示せ.

   (10) 任意の $x\in A$ について，x が A の集積点でないことと，x は A の孤立点であることは同値であることを示せ.

2. $\emptyset\neq A\subsetneq X$ とする.

   (1) X 上の離散位相 $\mathscr{O}_{\text{discrete}}:=\{X$ の全ての部分集合 $\}$ について，$A^\circ=\overline{A}=A$ であることを示せ.

   (2) X 上の密着位相 $\mathscr{O}_{\text{indiscrete}}:=\{\emptyset,X\}$ について，$A^\circ=\emptyset$, $\overline{A}=X$ であることを示せ.

3. (1) 一般に $A^\circ\cup B^\circ\subset(A\cup B)^\circ$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ であることを示せ.

   (2) $\mathbb{R}^n$ 上で通常の Euclid 距離 d を考える．$A:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})<1\}$, $B:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\geq 1\}$ に対し，A°, B°, $\overline{A}$, $\overline{B}$ を求めよ.

   (3) 一般には $A^\circ\cup B^\circ\neq(A\cup B)^\circ$, $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$ であることを示せ.

4. (1) A に含まれる開集合全体の和集合 $U:=\bigcup_{O\in\mathscr{O},\,O\subset A}O$ を考える．$U=A^\circ$ であることを示せ.

   (2) A を含む閉集合全体の共通部分 $V:=\bigcap_{F\in\mathscr{A},\,F\supset A}F$ を考える．$V=\overline{A}$ であることを示せ.

5. (1) 集合 X の二通りの部分集合族 $\mathscr{O}_i$ $(i=1,2)$ が，ともに開集合系の公理をみたしているとする．任意の $x\in X$ と，任意の $x\in U_1\in\mathscr{O}_1$ に対し，$x\in U_2\subset U_1$ となる $U_2\in\mathscr{O}_2$ が存在すると仮定する．位相 $\mathscr{O}_i$ $(i=1,2)$ に関する $A\subset X$ の内部を $A_i^\circ\subset A$ と書くとき，$A_1^\circ\subset A_2^\circ$ が成り立つことを示せ.

   (2) $\mathscr{O}:=\mathscr{O}_1\cap\mathscr{O}_2=\{U\subset X\mid U\in\mathscr{O}_1$ かつ $U\in\mathscr{O}_2\}$ は開集合系の公理 (O1)〜(O3) をみたすことを示せ.

   (3) $X=\mathbb{R}^n$ 上の通常の Euclid 距離 d_{Euc} が定める位相を $\mathscr{O}_{\text{Euc}}=\{d_{\text{Euc}}$が定める開集合全体 $\}$ とする．$\mathscr{O}_{\text{Euc}}$ について，$A:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\leq 1\}$ の内部 A_{Euc}° を求めよ.

   (4) $\mathbb{R}^n$ 上の別の距離 $d_{\max}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\max_{1\leq i\leq n}\{|x_i-y_i|\}$ を考え，$U_*(\boldsymbol{x};\delta):=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\mid d_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\delta\}$ とおく．ただし $*=\text{Euc}$ または max. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ と $\delta>0$ に対し，$U_{\text{Euc}}(\boldsymbol{x};\delta)\subset U_{\max}(\boldsymbol{x};\delta)$ であることを示せ.

   (5) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ と $\delta>0$ に対し，$U_{\max}(\boldsymbol{x};\delta')\subset U_{\text{Euc}}(\boldsymbol{x};\delta)$ となる $\delta'>0$ を見つけよ.

   (6) $d_{\max}$ が定める位相 $\mathscr{O}_{\max}$ についての A の内部を $A_{\max}^\circ$ とする．$A_{\text{Euc}}^\circ=A_{\max}^\circ$ を示せ.

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 5（2013 年 10 月 25 日）

担当：境 圭一

4 点集合 $X = \{a, b, c, d\}$ の部分集合族 $\mathscr{O} := \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ を考える．

(1) $\mathscr{O}$ は開集合系の公理 (O1), (O2), (O3) をみたすことを示せ．

(2) $\mathscr{O}$ が定める位相について，$A := \{a, b, c\} \subset X$ の内部 A° を求めよ．

（締切：11/1 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html