# 位相空間論 演習問題 6（2013 年 11 月 1 日）

担当：境 圭一

1. $X = \{a, b, c\}$ とする．次の部分集合族はいずれも開集合系の公理をみたしている（余力があれば証明せよ）．それぞれについて，$A = \{a, b\}$ の内部 $A^\circ$ と閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

   (1) $\mathscr{O}_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$　(2) $\mathscr{O}_2 := \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$　(3) $\mathscr{O}_3 := \{\emptyset, \{c\}, X\}$

   (4) $\mathscr{O}_4 := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$　(5) $\mathscr{O}_5 := \{X$ の全ての部分集合 $\}$　(6) $\mathscr{O}_6 := \{\emptyset, X\}$

2. (1) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0,\ x + y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．通常の Euclid 距離に関して $A^\circ$, $\overline{A}$ を求めよ．

   (2) $B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |\boldsymbol{x}| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ とする．通常の Euclid 距離に関して $B^\circ$, $\overline{B}$ を求めよ．

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 1$ が通常の Euclid 距離に関し連続写像（関数）であることを，連続性の定義を使って示そう．言いたいのは，任意の開集合 $O \subset \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 1 \in O\} \subset \mathbb{R}$ が開集合であること．$f^{-1}(O) = \emptyset$ なら，これは開集合である．$f^{-1}(O) \neq \emptyset$ の場合，任意の $a \in f^{-1}(O)$ が $f^{-1}(O)$ の内点であることを言えばよい．

   (1) $U(f(a); \delta) = (f(a) - \delta, f(a) + \delta) \subset O$ となる $\delta > 0$ が存在することを示せ．

   (2) $f^{-1}(U(f(a); \delta))$ を具体的に求めることにより，$a$ が $f^{-1}(O)$ の内点であることを示せ．

4. 前問の $f$ は全単射であることを示し，逆写像 $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求めよ．$g$ も連続写像であることを，連続性の定義を使って示せ．従って $f$ と $g$ はともに同相写像である．

5. 問題 1. (1) の $(X, \mathscr{O}_1)$ を考える．また $Y := \{p, q, r\}$ とし，$\mathscr{O}(Y) := \{\emptyset, \{r\}, \{p, q\}, Y\}$ で位相を定める．

   (1) 全単射 $f : X \to Y$ を $f(a) := r$, $f(b) := p$, $f(c) := q$ で定める．$f$ は連続写像であることを示せ．

   (2) $f^{-1}$ も連続写像であることを示せ．従って $f$ は同相写像であり，$(X, \mathscr{O}_1) \approx (Y, \mathscr{O}(Y))$ である．

   (3) $X$ の位相を問題 1. (2) の $\mathscr{O}_2$ に取り換えると，$f : (X, \mathscr{O}_2) \to (Y, \mathscr{O}(Y))$ は連続か？

6. 第一回の講義で扱った $X = [0, 2]$, $Y := [0, 1) \cup [2, 3]$ と $f : X \to Y$, $f(x) := x$ $(0 \leq x < 1)$, $f(x) := x + 1$ $(1 \leq x \leq 2)$ を考える．$X, Y$ ともに Euclid 距離 $d(x, y) := |x - y|$ で位相空間とみなす．

   (1) $f$ は全単射であることを示し，逆写像 $g = f^{-1} : Y \to X$ を求めよ.（$g$ も全単射である）

   (2) $g : Y \to X$ は連続であることを示せ．

   (3) $0 < \epsilon < 1$ に対し，$2 \in Y$ の $\epsilon$ 近傍 $U(2; \epsilon)$ を考える．$f^{-1}(U(2; \epsilon)) \subset X$ は開集合でないことを示せ.（従って $f = g^{-1}$ は連続でなく，$f$ と $g$ は同相写像ではない）

7. （教科書 4 章の演習問題 [2-1]）任意の位相空間 $(X, \mathscr{O}(X))$, $(Y, \mathscr{O}(Y))$ と，任意の写像 $f : X \to Y$ を考える．

   (1) $\mathscr{O}(X) = \{X$ の全ての部分集合 $\}$ であるとき，$\mathscr{O}(Y)$ によらず，$f$ は連続であることを示せ．

   (2) $\mathscr{O}(Y) = \{\emptyset, Y\}$ であるとき，$\mathscr{O}(X)$ によらず，$f$ は連続であることを示せ．

8. （教科書 4 章の演習問題 [1-7]）集合 $X$（位相は入っていない）の任意の部分集合 $A$ に対し，$A^\square \subset X$ が，教科書の定理 4.1.2 (p. 87) と同様の 4 条件をみたすように定められたとする．このとき $\mathscr{O} := \{O \subset X \mid O^\square = O\}$ と定めると，$\mathscr{O}$ は開集合系の公理をみたすことを示せ（ヒント：4 条件から，$A \subset B \Rightarrow A^\square \subset B^\square$ が成り立つことを示しておくとよい）．この位相 $\mathscr{O}$ に関する $A$ の内部 $A^\circ$ は，$A^\circ = A^\square$ をみたすことを示せ．

9. $X$ 上の点列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が $a \in X$ に収束するとは，$a$ の任意の開近傍 $O$ に対し，ある自然数 $N = N(O)$ が存在して，$n > N$ のとき $a_n \in O$ となることである．$A \subset X$ に対し，$a \in \overline{A}$ であることと，$A$ のある点列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が $a$ に収束することは同値であることを示せ．

（提出の必要はありません）

**位相空間論 レポート問題 6（2013 年 11 月 1 日）**

担当：境 圭一

$\mathbb{R}$ 上で通常の Euclid 距離を考える．

(1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$ は連続写像であることを，定義に従って示せ．

(2) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := (2x+1)^2$ は連続写像であることを示せ．ただし，11/1 の演習問題 3 の結論と，教科書の定理 4.2.1 (2) を使ってよい．

（締切：11/8 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html