位相空間論 演習問題 7（2013 年 11 月 8 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$（の部分集合）上では Euclid 距離から定まる位相を考える．

1. 次の写像は同相写像であることを示せ．既知の初等関数が連続であることは使ってよい．

   (1) $f_1 : (0,1) \to (a,b)$, $f_1(x) := (b-a)x + a$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$

   (2) $f_2 : [0,1) \to [0,\infty)$, $f_2(x) := \dfrac{x}{1-x}$

   (3) $U := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$ に対し，$f_3 : U \to \mathbb{R}^n$, $f_3(\boldsymbol{x}) := f_2(|\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{x}$

   (4) $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1,0)\}$ に対し，$f_4 : (0,1) \to V$, $f_4(\theta) := (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$

2. 同相写像 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ を構成せよ．（ヒント：問題 1. (2)）

3. 同相写像 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（ヒント：連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は最大値を持つことを使う）

4. 一般に成り立たない問題でしたので削除します．すみません．

5. $f : X \to Y$ を同相写像とする．$A \subset X$ に対し，$f(A^\circ) = f(A)^\circ$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ であることを示せ．

6. 位相空間 $(X, \mathscr{O}(X))$, $(Y, \mathscr{O}(Y))$ の間の写像 $f : X \to Y$ を考える．$\mathscr{O}(Y) = \{Y$ の全ての部分集合$\}$ のとき，f は開写像かつ閉写像だが，連続とは限らないことを示せ．

7. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ は連続，開写像かつ閉写像であることを示せ．

   (2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 3x^2$ は連続，閉写像だが開写像ではないことを示せ．（ヒント：$f(-\epsilon, \epsilon)$ を考えよ）

8. 距離空間 (X, d) 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を考える．f が連続写像であることは，次の (*) と同値であることを示せ．（ヒント：講義でやった $X = \mathbb{R}$, $d(x,a) = |x - a|$ の場合と全く同様）

   (*) 任意の $\epsilon > 0$ と $a \in X$ に対し「$d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$」となるような $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ が存在する

9. （教科書 p. 97 の例 2）

   (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) := xy - 1$ で定める．$\epsilon > 0$ と $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対し，「$|a' - a| < \delta$ かつ $|b' - b| < \delta \Rightarrow |f(a',b') - f(a,b)| < \epsilon$」となるような $\delta > 0$ を，a, b, ϵ を使って一つ求めよ．

   (2) (1) の δ に対し，「$d((a',b'),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$」が成り立つことを示せ．

   (3) f は連続関数であることを示せ．（問題 8 を使う）

   (4) 位相空間 X 上の連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ に対し，$U := \{x \in X \mid g(x) > 0\}$ は X の開集合であることを示せ．

   (5) 双曲線 $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ．

   (6) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $p(x,y) := x$ で定義する（第一座標への**射影**とよぶ）．p は連続かつ開写像であることを示せ．

   (7) $p(H) := \{p(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in H\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合でないことを示せ．従って p は閉写像ではない．

10. （今までの復習その一）

    (1) 集合 X に対し，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ が距離であることの定義を述べよ．

    (2) $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid 距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ が (1) の意味で距離であることを示せ．$\mathbb{R}^n$ 上の他の距離の例を二つ挙げ，それが距離であることを証明せよ．

    (3) 集合 X の部分集合族 $\mathscr{O}$ に対する開集合系の公理を述べよ．

    (4) (X, d) を距離空間とするとき，d を使って X の開集合系を定義し，それが開集合系の公理をみたすことを示せ．

(5) $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid 距離から定まる位相について，$U(\boldsymbol{a};\delta) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \delta\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．

(6) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $A \subset X$, ならびに $x \in X$ に対し，x が A の (i) 内点である，(ii) 外点である，(iii) 境界点である，(iv) 触点である，(v) 集積点である，(vi) 孤立点である，ことの定義を述べよ．

(7) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $A \subset X$, ならびに $x \in X$ に対し，(i) x が A の内点ならば $x \in A$ であること，(ii) $x \in A$ ならば x は A の触点であること，(iii) x が A の境界点ならば，x は A の触点でもあること，を示せ．A の内点 x は A の境界点か？

(8) $A := [0,1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ とする．Euclid 距離 $d(x,y) := |x-y|$ について，$x \in \mathbb{R}$ が (6) の (i)〜(vi) の定義をみたすか，以下の場合に分けて調べよ．(a) $x<0$, (b) $x=0$, (c) $0<x<1$, (d) $x=1$, (e) $1<x<2$, (f) $x=2$, (g) $x>2$

(9) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $x \in X$ に対し，$U \subset X$ が x の近傍であることの定義を述べよ．$x \in U$ であっても U が x の近傍でないような $U \subset X$ の例を挙げよ．

(10) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $x \in X$ に対し，$x \in O$ となる $O \in \mathscr{O}$ は x の近傍であることを示せ．

(11) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $A \subset X$ に対し，A の内部 A° ならびに閉包 $\overline{A}$ を定義し，$A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ であることを示せ．$A^\circ = A$ や $A = \overline{A}$ が成り立つのはどんな場合か述べ，それを証明せよ．

(12) 位相空間 $(X,\mathscr{O}(X))$, $(Y,\mathscr{O}(Y))$ の間の写像 $f : X \to Y$ が (i) 連続写像である，(ii) 開写像である，(iii) 閉写像である，ことの定義を述べよ．

(13) 位相空間 $(X,\mathscr{O})$ と $A \subset X$ に対し，A の X に対する相対位相を定義し，それが実際に A の位相を定めることを示せ．相対位相に関し，包含写像 $i : A \to X$ は連続写像であることを示せ．

(14) $\mathbb{R}$ 上の Euclid 距離に関し，一次関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax+b$ が連続写像であることを，連続写像の定義に従って示せ．他の写像（多項式関数，根号を含む関数，三角関数，指数関数，対数関数など）についても同様のことを試みよ．

(15) 位相空間 $(X,\mathscr{O}(X))$, $(Y,\mathscr{O}(Y))$ の間の写像 $f : X \to Y$ が同相写像であることの定義を述べよ．

(16) 位相空間 $(X,\mathscr{O}(X))$, $(Y,\mathscr{O}(Y))$ が同相であることの定義を述べよ．

11. （今までの復習その二）$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 1,\ -1 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく．

(1) A を図示し，定義に従って内部 A° を求めよ（位相は Euclid 距離で定まるものを考える）．

(2) A は $\mathbb{R}^2$ における $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$ の近傍か？

(3) $\boldsymbol{x} := (0,1) \notin A$ を考える．$0 < \epsilon \leq 4$ のとき，点 $(0, 1-\frac{\epsilon}{2})$ を考えることにより，$U(\boldsymbol{x};\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ を示せ．$0 < \epsilon < \epsilon'$ のとき $U(\boldsymbol{x};\epsilon) \subset U(\boldsymbol{x};\epsilon')$ であることを使って，$\epsilon' > 4$ のときも $U(\boldsymbol{x};\epsilon') \cap A \neq \emptyset$ であることを示せ（よって $\boldsymbol{x}$ は A の触点）．閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

(4) $\overline{A} \subset \mathbb{R}^2$ を相対位相により位相空間とみなす．同相写像 $f : \overline{A} \to \mathbb{R}^2$ は存在しないことを示せ．

(5) A の外点全体の集合は $\{(x,y) \mid |x| > 1,\ |y| > 1\}$ であることを示せ．

(6) $B := A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合か？

(7) $A \subset \mathbb{R}^2$ に相対位相（教科書 p. 92）を入れたとき，B は A の開集合であることを示せ．

(8) $(\overline{A})^c$, $(A^c)^\circ$ をそれぞれ求め，(少なくとも今の場合は）$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ であることを確かめよ．

(9) $\overline{A^c}$, $(A^\circ)^c$ をそれぞれ求め，(少なくとも今の場合は）$\overline{A^c} = (A^\circ)^c$ であることを確かめよ．

(10) $\overline{A} - A^\circ$ を求め，(少なくとも今の場合は）$(\overline{A} - A^\circ)^\circ = \emptyset$ であることを示せ．

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 7（2013 年 11 月 8 日）

担当：境 圭一

$X := \{a, b, c\}$, $Y := \{p, q, r, s\}$ とし，それぞれ

$$\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}, \quad \mathscr{O}(Y) := \{\emptyset, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}, Y\}$$

で位相空間とみなす．$f : X \to Y$ を $f(a) := p$, $f(b) := q$, $f(c) := r$ で定めるとき，f は (1) 連続か，(2) 開写像か，(3) 閉写像か，理由とともに答えよ．

※締切：11/14（木）18:00, 提出先：研究室 (403) 前のレポートボックス

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html