位相空間論 演習問題 8（2013 年 11 月 22 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$（の部分集合）上では Euclid 距離から定まる位相を考える．

1. $\mathbb{R}$ に Euclid 距離を入れる．部分集合族 $\mathscr{O}^* := \{U(x;r) \subset \mathbb{R} \mid x, r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ を考える．

   (1) $\mathscr{O}^*$ は定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたすこと，つまり次の二つのことを示せ：

      (i) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$x \in V$ となる $V \in \mathscr{O}^*$ が存在する

      (ii) 任意の $V_1, V_2 \in \mathscr{O}^*$ と任意の $x \in V_1 \cap V_2$ に対し，$x \in V \subset V_1 \cap V_2$ となる $V \in \mathscr{O}^*$ が存在する

   (2) $\mathscr{O}^*$ は開集合系の公理のうち (O2) をみたさないことを，次の手順で示せ．

      (i) $a_1 := 1,\ a_2 := 1.4,\ a_3 := 1.41, \ldots,\ a_n := \sqrt{2}$ の小数点以下第 $n-1$ 位まで取ったもの，とおく．$U_n := (0, a_n) \in \mathscr{O}^*$ を示せ．

      (ii) $\bigcup_{n\geq 1} U_n = (0, \sqrt{2}) \notin \mathscr{O}^*$ を示せ．

   (3) $p, q \in \mathbb{R}$ $(p < q)$ を無理数とする．(2) を参考にして，$(p, q) = \bigcup_{n \geq 1} V_n$ となる $V_n \in \mathscr{O}^*$ を構成せよ．

2. 「任意の開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ は無数に多くの有理数を含む」ことを，以下の手順で示せ．

   (1) k を任意の自然数とする．$b - a = \epsilon$ とおき，$n > k/\epsilon$ となる自然数 n を取ると，開区間 (na, nb) は k 個の整数を含むことを示せ．

   (2) (1) の整数を $m_1, \ldots, m_k$ とするとき，$m_1/n, \ldots, m_k/n \in (a, b)$ を示せ．

3. $\mathbb{Q}^n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ とおく．$\mathbb{R}^n$ に Euclid 距離を入れ，部分集合族 $\mathscr{O}^* := \{U(\boldsymbol{r}; \rho) \mid \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^n,\ \rho \in \mathbb{Q},\ \rho > 0\}$ を考える．

   (1) $\mathscr{O}^*$ は開集合系の公理 (O1) をみたさないことを示せ．

   (2) 定理 4.3.3 を使って，$\mathscr{O}^*$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 距離に関する位相の開基であることを示せ．
   ヒント：任意の開集合 $O \subset \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{a} \in O$ を取る．O は開集合だから，$U(\boldsymbol{a}; \delta) \subset O$ となる $\delta > 0$ が存在する．$r_1, \ldots, r_n, \rho \in \mathbb{Q}$ を次のように取る：
   $$0 \leq |a_i - r_i| < \delta/(4\sqrt{n}) \quad (1 \leq \forall i \leq n), \quad 0 < \rho < \delta/2.$$
   $\boldsymbol{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ とおくと，$\boldsymbol{a} \in U(\boldsymbol{r}; \rho) \subset U(\boldsymbol{a}; \delta)$ であることを示せる（そのためには $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) < \rho$ と $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) + \rho < \delta$ を示せばよい）．よって $U(\boldsymbol{r}; \rho) \in \mathscr{O}^*$ で $\boldsymbol{a} \in U(\boldsymbol{r}; \rho) \subset O$ をみたすものが取れた．

   (3) $\mathscr{O}^*$ は可算集合であることを示せ．よって $\mathbb{R}^n$ は Euclid 距離に関し第 2 可算公理をみたす．

4. (1) 集合 X に離散位相 $\mathscr{O} := \{X$ の全ての部分集合$\}$ を入れる．$\mathscr{O}^* \subset \mathscr{O}$ を $(X, \mathscr{O})$ の開基とするとき，任意の $x \in X$ に対し $\{x\} \in \mathscr{O}^*$ が成り立つことを示せ．(定理 4.3.3 を用いよ)

   (2) X が第 2 可算公理をみたすとき，X は可算集合であることを示せ．

   (3) $\mathbb{R}^n$ に離散位相を入れた空間は第 2 可算公理をみたさないことを示せ．

5. $\mathbb{R}^n$ に Euclid 距離を入れる．$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ に対し，$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ とおく．$\mathscr{O}^* := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$ は可算集合で，$\mathbb{R}^n$ の開基であることを示せ．

6. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$A \subset X$ とする．$\overline{A} = X$ のとき，A は X において**稠密**（ちゅうみつ）(dense) であるという．稠密な可算集合 $A \subset X$ が存在するとき，X は**可分**である (separable) という．

   (1) 第 2 可算公理をみたす $(X, \mathscr{O})$ は可分であることを示せ．(ヒント：定理 4.3.11 参照．可算開基 $\mathscr{O}^* = \{O_i\}_{i \geq 1}$ を取り，$p_i \in O_i$ を取って $A := \{p_i\}_{i \geq 1}$ とおくと A は可算集合で $\overline{A} = X$ となる)

   (2) $\mathbb{R}^n$ に Euclid 距離を入れた位相空間は可分であることを示せ．$\overline{A} = \mathbb{R}^n$ となる A を具体的に求めよ．

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

位相空間論 レポート問題 8（2013 年 11 月 22 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}$ を距離 $d(x,y) := |x-y|$ で位相空間とみなす．$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ を整数全体の集合とする．$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{Z}$ の触点でないことを，触点の定義により示せ．

2. $X = \{a, b, c\}$ とし，$\mathscr{O}^* := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ とする．

   (i) $\mathscr{O}^*$ は定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたすことを示せ．

   (ii) $\mathscr{O}^*$ が生成する位相 $\mathscr{O} = \{\emptyset\} \cup \{\mathscr{O}^*$の元の和集合全体$\}$ を求めよ．

（締切：11/29 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html