位相空間論 演習問題 9（2013 年 11 月 29 日）

担当：境 圭一

1. 集合 X の部分集合族 $\mathscr{O}_i^*$ $(i=1,2)$ が，いずれも定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたしているとする．さらに，次の条件 $(*)$ が成り立つとする：

   $(*)$　任意の $U \in \mathscr{O}_1^*$ と，任意の $x \in U$ に対し，$x \in V_x \subset U$ となる $V_x \in \mathscr{O}_2^*$ を取ることができる．

   (1) 上のような U と V_x に対し，$U = \bigcup_{x \in U} V_x$ が成り立つことを示せ．

   (2) $\mathscr{O}_i^*$ が生成する位相を $\mathscr{O}_i$ と書く．任意の $O \in \mathscr{O}_1$ は，$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ $(U_\lambda \in \mathscr{O}_2^*)$ の形に表せることを示せ．

   (3) $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$ を示せ．（このとき，位相 $\mathscr{O}_2$ は位相 $\mathscr{O}_1$ より「強い」という）

2. $(a,b) \times (c,d) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < x_1 < b,\ c < x_2 < d\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と書く．

   $$\mathscr{O}_{\mathrm{prod}}^* := \{(a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b,\ c<d\}$$

   が生成する $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の直積位相 $\mathscr{O}_{\mathrm{prod}}$ を考える．この位相は Euclid 距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ が定める位相 $\mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}$ と等しいことを，以下のように示せ．

   (1) 定理 4.3.3 を使って，$\mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}^* := \{U(\boldsymbol{x}; r) \subset \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2,\ r>0\}$ は $\mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}$ の開基であることを示せ．

   (2) $\mathscr{O}_1^* := \mathscr{O}_{\mathrm{prod}}^*$, $\mathscr{O}_2^* := \mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}$ に対し，問題 1 の $(*)$ が成り立つことを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{x} \in (a,b) \times (c,d)$ に対し，$U(\boldsymbol{x}; r) \subset (a,b) \times (c,d)$ となる $r>0$ を一つ見つけよ．

   (3) 逆に $\mathscr{O}_1^* := \mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}^*$, $\mathscr{O}_2^* := \mathscr{O}_{\mathrm{prod}}$ に対し，問題 1 の $(*)$ が成り立つことを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x}, r)$ に対し，$\boldsymbol{y} \in (a,b) \times (c,d) \subset U(\boldsymbol{x}; r)$ となる a,b,c,d を一組見つけよ．

   (4) 問題 1. (3) を使って，$\mathscr{O}_{\mathrm{prod}} = \mathscr{O}_{\mathrm{Euc}}$ を示せ．

3. 問題 2 と同様にして，$\mathbb{R}^n$ の直積位相は Euclid 距離から定まる位相と等しいことを示せ．

4. $\mathbb{R}^n$ の直積位相は，$\mathbb{R}^n$ の距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$ が定める位相と等しいことを示せ．

5. (1) $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，それぞれ $a(x,y) := x+y$ と $m(x,y) := xy$ で定義すると，a, m は連続写像（連続関数）であることを示せ．

   (2) X_i を位相空間，$f_i : X_i \to \mathbb{R}$ を連続写像とする $(i=1,2)$．このとき，$f_1 + f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ と $f_1 f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ を，それぞれ $(f_1+f_2)(x_1,x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$ と $(f_1 f_2)(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$ で定めると，$f_1 + f_2$ と $f_1 f_2$ は連続写像であることを示せ．（ヒント：(1) と，定理 4.3.12 (4) を使う）

6. X_i $(1 \le i \le n)$ を位相空間，$A_i \subset X_i$ とするとき，$(\prod_{1 \le i \le n} A_i)^\circ = \prod_{1 \le i \le n} A_i^\circ$ が成り立つことを示せ．

7. $d : X \to X \times X$ を $d(x) := (x,x)$ で定める（**対角写像**, diagonal map とよぶ）．d は連続であることを示せ．

8. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$x \in X$ の近傍系を $\mathscr{N}_x$ とする．$\mathscr{N}_x$ の部分集合 $\mathscr{N}_x^*$ が次の条件をみたすとき，$\mathscr{N}_x^*$ を x の**基本近傍系**という：任意の $V \in \mathscr{N}_x$ に対し，$x \in W \subset V$ となる $W \in \mathscr{N}_x^*$ が存在する．

   (1) $V \in \mathscr{N}_x$ であることと，x が V の内点であることは同値であることを示せ．（定義を言い換えてみよ）

   (2) x の基本近傍系 $\mathscr{N}_x^*$ が取れるとき，任意の $V \in \mathscr{N}_x$ は，$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ $(W_\lambda \in \mathscr{N}_x^*)$ と書けることを示せ．

   (3) （定理 4.3.9）任意の $x \in X$ に対し可算個からなる基本近傍系 $\mathscr{N}_x^*$ が取れるとき，X は**第 1 可算公理をみたす**という．第 2 可算公理をみたす位相空間 X は第 1 可算公理もみたすことを示せ．

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 9（2013 年 11 月 29 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}$ を距離 $d(x,y) := |x-y|$ で位相空間とみなす．$A := (0,1) \subset \mathbb{R}$ とする．$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ は A の内点であることを，内点の定義により示せ.

2. $X := \{a,b\}$, $Y := \{p,q\}$ とし，$\mathscr{O}^*(X) := \{\{a\}, X\}$, $\mathscr{O}^*(Y) := \{\{q\}, Y\}$ とする.
   - (i) $\mathscr{O}^*(X)$, $\mathscr{O}^*(Y)$ が生成する位相 $\mathscr{O}(X)$, $\mathscr{O}(Y)$ を求めよ.
   - (ii) $\mathscr{O}^*(X \times Y)$ と，$\mathscr{O}^*(X \times Y)$ が生成する位相 $\mathscr{O}(X \times Y) = \{\emptyset\} \cup \{\mathscr{O}^*(X \times Y)$ の元の和集合全体 $\}$ を求めよ.

（締切：12/6 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html