位相空間論 演習問題 10（2013 年 12 月 6 日）

担当：境 圭一

1. (1) 連結な位相空間 X からの連続写像 $f : X \to Y$ が全射でもあるとき，Y は連結であることを示せ.（定理 4.4.2 を使う）
   (2) $\mathbb{R}$ に Euclid 距離で定まる位相を入れる．任意の開区間 (a, b) は連結であることを示せ.（ヒント：(1) と，11/8 の問題 2 を使う）
   (3) 教科書の定理 4.4.3 を使って，$[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ は連結であることを示せ.

2. 集合 $X := \{a, b, c, d\}$ に次の位相を入れたとき，X は連結か調べよ．それぞれの位相について，部分集合 $A := \{c, d\}$ は連結か？
   (1) $\mathscr{O}_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, \{d\}, \{a, d\}, X\}$
   (2) $\mathscr{O}_2 := \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$
   (3) $\mathscr{O}_3 := \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$

3. （教科書の定理 4.4.8）X_1, X_2 を，$\emptyset$ でない連結な位相空間とする．
   (1) $a_k \in X_k$ $(k = 1, 2)$ を任意に取る．写像 $i_k : X_k \to X_1 \times X_2$ を $i_1(x_1) := (x_1, a_2)$, $i_2(x_2) := (a_1, x_2)$ と定めると，i_k は連続であることを示せ.
   (2) 二点集合 $\{1, 2\}$ に離散位相を入れ，任意の連続写像 $f : X_1 \times X_2 \to \{1, 2\}$ を取る．$f \circ i_k : X_k \to \{1, 2\}$ は定値写像であることを，定理 4.4.1 を使って示せ.
   (3) (2) より，任意の $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し，$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$ であることを示せ．定理 4.4.1 を使って，$X_1 \times X_2$ は連結であることを示せ.

4. $\mathbb{R}^n$（の部分集合）に Euclid 距離で定まる位相を入れる．
   (1) $\mathbb{R}^n$ は連結であることを示せ.（問題 3 と $\mathbb{R}$ の連結性を用いる）
   (2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は連結でないことを示せ．$\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ は連結か？
   (3) $n \geq 2$ のとき，$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ は連結であることを示せ.（問題 6 を使うとよい）

5. (1) 位相空間 X の連結な部分空間 $A \subset X$ を考える．定理 4.4.3 を使って，$\overline{A} \subset X$ も連結であることを示せ.
   (2) $\mathbb{R}^2$ に Euclid 距離から定まる位相を入れる．$A_\pm := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \pm 1)^2 + y^2 < 1\}$ とおき，$A := A_+ \cup A_- \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく．A は連結であることを示せ.（問題 6 を使うとよい）
   (3) (2) の A に対し，A° を求めよ．A° は連結か？

6. 位相空間 X が**弧状連結** (path connected) とは，任意の $x, y \in X$ に対し，連続写像 $\gamma : [0, 1] \to X$ で，$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ みたすものが存在すること（任意の二点を「曲線」で結べるということ：次回の講義でやります）.
   (1) X は弧状連結であるとする．二点集合 $\{1, 2\}$ に離散位相を入れ，$f : X \to \{1, 2\}$ を任意の連続関数とする．任意の $x, y \in X$ に対し上のような曲線 γ を取り，$f \circ \gamma : [0, 1] \to \{1, 2\}$ を考えることにより，$f(x) = f(y)$ であることを示せ.
   (2) 問題 1. (3) と定理 4.4.1 を使って，弧状連結な X は連結でもあることを示せ.

7. X を位相空間とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**局所定数関数** (locally constant function) であるとは，任意の $x \in X$ に対し，x の開近傍 O が存在して，$f|_O$ が定数関数になること．
   (1) 局所定数関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は連続関数であることを示せ.
   (2) X が連結であるとき，局所定数関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は定数関数である，つまり任意の $x \neq y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ であることを示せ.

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 10（2013 年 12 月 6 日）

担当：境 圭一

1. $X = \{a, b, c\}$ に位相 $\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ を入れる．X から $A := \{a, b\}$ に入る相対位相 $\mathscr{O}(A)$ を求めよ．

2. (1) 集合 X に密着位相 $\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, X\}$ を入れるとき，X は連結であることを示せ．

   (2) 集合 X に離散位相 $\mathscr{O}(X) := \{X$ の全ての部分集合$\}$ を入れる．X が二つ以上の元を含むとき，X は連結でないことを示せ．

（締切：12/13 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html