位相空間論 演習問題 11（2013 年 12 月 13 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$（の部分集合）上では Euclid 距離から定まる位相を考える．

1. (1) $\mathbb{R}$ は弧状連結であることを示せ．つまり，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，連続写像 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ で $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ をみたすものを構成せよ．
   (2) X_i $(1 \leq i \leq n)$ を位相空間とし，$\gamma_i : [0,1] \to X_i$ を連続写像とする．$\gamma : [0,1] \to X_1 \times \cdots \times X_n$ を $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ で定めるとき，γ は連続であることを示せ.（定理 4.3.12 (3) を使う）
   (3) $X_1, \ldots, X_n$ が弧状連結な位相空間であるとき，$X_1 \times \cdots \times X_n$ も弧状連結であることを示せ．$\mathbb{R}^n$ は弧状連結であることを示せ.
   (4) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は連結でないことを示せ.
   (5) $n \geq 2$ とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ は弧状連結であることを示せ.
   (6) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ は同相でないことを示せ.

2. 次のように定義される $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X, Y, Z を図示せよ．これらは互いに同相でないことを示せ.
   - $X := \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 1\}$
   - $Y := \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 0\} \cup \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 0\}$
   - $Z := \{(t, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t,-1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq t \leq 1\}$

3. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合は弧状連結であることを示せ.
   (1) $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   (2) $S^1 \vee S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

4. $b \in X$ を一つ選び固定する.「X が弧状連結である」$\Leftrightarrow$「任意の $x \in X$ に対し，連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = x$ をみたすものが存在する」を示せ.

5. 位相空間 X の連結成分の集合 S_X が有限集合であるとき，各連結成分は X の開集合であることを示せ（定理 4.4.5 (1) を使う）．各連結成分が開集合にならない例を挙げよ.

6. $A, B \subset X$ とする.
   (1) （定理 4.4.4）A, B とも連結で，さらに $A \cap B \neq \emptyset$ なら，$A \cup B$ は連結であることを示せ.
   (2) （定理 4.4.10）A, B とも弧状連結で，さらに $A \cap B \neq \emptyset$ なら，$A \cup B$ は弧状連結であることを示せ.
   (3) $A \cup B$, $A \cap B$ とも連結なら，A, B は連結であることを示せ.

7. $X := \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$ とし，$\mathbb{R}^2$ から相対位相を入れる．X は連結であるが，弧状連結でないことを示せ.

8. $\emptyset \neq O \subset \mathbb{R}^n$ が連結な開集合ならば O は弧状連結であることを，以下のように示せ.
   (1) O が弧状連結でないと仮定する．$x \in O$ を任意に取り，$O_1 := \{y \in O \mid y$ は x と曲線で結べる $\}$, $O_2 := \{z \in O \mid z$ は x と曲線で結べない $\}$ とおく．$O = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1, O_2 \neq \emptyset$ であることを示せ.
   (2) 任意の $y \in O_1$ に対し，$U(y;\delta) \subset O$ となる $\delta > 0$ を取る．$U(y;\delta) \subset O_1$ であることを示せ．従って y は O_1 の内点で，O_1 は開集合である.（ヒント：$y \in O_1$ より x と y を結ぶ曲線 γ_1 がある．任意の $z \in U(y;\delta)$ に対し，y と z を結ぶ曲線 γ_2 を見つければ，γ_1 と γ_2 を使って x と z を結ぶ曲線を作れる.）
   (3) O_2 は開集合であることを示せ.（ヒント：$z \in O_2$ を取る．$w \in U(z;\epsilon) \subset O$ が x と曲線で結べたとすると，z も x と結べることを示す．それは $z \in O_2$ に矛盾し，$U(z;\epsilon) \subset O_2$ がわかる.）これらから矛盾を導け.

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

位相空間論 レポート問題 11（2013 年 12 月 13 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}$ 上で Euclid 距離を考える． $A := (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\} \subset \mathbb{R}$ の内部 A° を求めよ.

2. $\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える.

   (1) $A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$ は弧状連結であることを示せ.

   (2) $B := A \setminus \{\mathbf{0}\}$ は弧状連結であることを示せ.

（締切：12/20 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html