位相空間論 演習問題 12（2013 年 12 月 20 日）

担当：境 圭一

1. (1) （講義でやった）分離公理 (T_1) は，次の条件（教科書 p. 117 の $\mathbf{T}_1$）と同値であることを示せ：
   任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ に対し，$y \notin V$ をみたす $V \in \mathscr{N}_x$ が存在する．
   (2) （講義でやった）分離公理 (T_2) は，次の条件（教科書 p. 117 の $\mathbf{T}_2$）と同値であることを示せ：
   任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ に対し，$V_x \cap V_y = \emptyset$ をみたす $V_x \in \mathscr{N}_x$, $V_y \in \mathscr{N}_y$ が存在する．

2. (1) （定理 4.5.2）X, Y が T_1 であるとき，部分空間 $A \subset X$, 直積空間 $X \times Y$ も T_1 であることを示せ．
   (2) （定理 4.5.4）X, Y が Hausdorff であるとき，部分空間 $A \subset X$, 直積空間 $X \times Y$ も Hausdorff であることを示せ．
   (3) （定理 4.5.7）X, Y が正則であるとき，部分空間 $A \subset X$, 直積空間 $X \times Y$ も正則であることを示せ．
   (4) （定理 4.5.10）X が正規，$A \in \mathscr{A}(X)$ であるとき，A も正規であることを示せ．

3. 分離公理 (T_2) は，次の条件 (T_2') と同値であることを示せ：任意の $x \in X$ に対し $\displaystyle\bigcap_{U \in \mathscr{N}_x \cap \mathscr{A}(X)} U = \{x\}$.

4. （定理 4.5.5）分離公理 (T_3) は，次の条件 (T_3') と同値であることを示せ：
   任意の $x \in X$ と $x \in O$ をみたす $O \in \mathscr{O}(X)$ に対し，$x \in V \subset \overline{V} \subset O$ をみたす $V \in \mathscr{O}(X)$ が存在する．

5. （定理 4.5.8）分離公理 (T_4) は，次の (T_4') と同値であることを示せ：
   任意の $F \in \mathscr{A}(X)$ と $F \subset O$ をみたす $O \in \mathscr{O}(X)$ に対し，$F \subset V \subset \overline{V} \subset O$ をみたす $V \in \mathscr{O}(X)$ が存在する．

6. $\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える．$X := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, $E := \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ．これらを分離する開集合，つまり $U, V \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^2)$ で，$X \subset U$, $E \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ をみたすものを一組求めよ．

7. (1) （定理 4.5.12）第 2 可算公理をみたす正則空間は正規空間であることを示せ．
   (2) 有限集合は，正則ならば正規であることを示せ．

8. $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, $H_+ := \{(x, y) \in H \mid y > 0\} \subset H$ とおく．H の部分集合で次の (i), (ii) の形のものを考え，その全体を $\mathscr{O}^*$ とおく：
   (i) $U(\boldsymbol{x}; r) \subset H_+$（通常の Euclid 距離に関する開球），ただし $\boldsymbol{x} \in H_+$
   (ii) $(H_+ \cap U(\boldsymbol{x}; r)) \cup \{\boldsymbol{x}\}$, ただし $\boldsymbol{x} \in H - H_+$

   (1) $\mathscr{O}^*$ は定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたすことを示せ．
   (2) $\mathscr{O}^*$ で生成される位相 $\mathscr{O}$（通常の Euclid 位相とは異なる）を入れた H は Hausdorff だが正則ではないことを示せ．例えば $H_+ \cup \{\mathbf{0}\} \in \mathscr{O}$ であることと，$H - (H_+ \cup \{\mathbf{0}\})$ と $\mathbf{0} \in H$ が開集合で分離できないことを示せ．

9. X が (T_1) と次の条件 (T^*) をみたすとき，X は**完全正則空間**であるという：
   (T^*) 任意の $A \in \mathscr{A}(X)$ と，$x_0 \notin A$ をみたす任意の点 x_0 に対し，次の (i), (ii) をみたす連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在する：(i) $f(x_0) = 0$, (ii) 任意の $a \in A$ に対し $f(a) = 1$.

   「X は正規 $\Rightarrow$ X は完全正則」と「X は完全正則 $\Rightarrow$ X は正則」を示せ．

10. (1) $\mathscr{O}^* := \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$ は定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたすことを示せ．
    (2) （難）$\mathscr{O}^*$ で生成される位相を $\mathscr{O}$ と書く．$\mathbb{S} := (\mathbb{R}, \mathscr{O})$（Sorgenfrey 直線と呼ぶ）は正規であることを示せ．
    (3) （難）$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は正則だが正規でないことを示せ.（ヒント：$\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Q}\}, \{(x, -x) \mid x \notin \mathbb{Q}\} \in \mathscr{A}(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ であり，これらは開集合で分離できないことを示す）正規空間の直積は正規とは限らないこともわかる．

（提出の必要はありません）

位相空間論 レポート問題 12（2013 年 12 月 20 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える．$O := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

2. $\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える.

   (1) $X := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$（$x$ 軸）は閉集合であることを示せ.

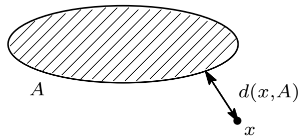
   (2) 点 $(0,2) \in \mathbb{R}^2$ と X を分離する開集合，つまり $(0,2) \in O_1$, $X \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ となる開集合 O_1, O_2 を一組求めよ.（ヒント：問題 1 を用いよ）

（締切：1/10 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

おまけ：距離空間が正規空間であること（定理 4.5.10）について．これは大事な事実ですが講義では話せないので，概要を記しておきます．以下 $X = (X,d)$ は距離空間とします.

定義. 点 $x \in X$ と部分集合 $A \subset X$ に対し，$d(x,A) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ を，x と A の**距離**と呼ぶ.



明らかに $d(x,A) \geq 0$. もし $x \in A$ なら，$d(x,x) = 0$ だから $d(x,A) = 0$. 一方，$d(x,A) = 0$ としても $x \notin A$ であることもある．例えば $X = \mathbb{R}^2$, $A := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{a}| < 1\}$ のとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$d((1,0),\boldsymbol{a}) < \epsilon$ となる $\boldsymbol{a} \in A$ が存在する（例えば $\boldsymbol{a} = (1-\epsilon/2, 0)$ など）．よって $d((1,0),A) = 0$ である．しかし $(1,0) \notin A$.

定理 (定理 3.5.9)**.** X の部分集合 $A \subset X$ を固定するとき，写像 $f_A : X \to \mathbb{R}$, $f_A(x) := d(x,A)$ は連続関数である.

定理 (定理 3.5.10)**.** $A, B \subset X$ が閉集合で $A \cap B = \emptyset$ をみたすとき，$f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)} = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

で定義でき，連続関数となる.

$A \cap B = \emptyset$ だけでは，f の分母が 0 になることがあり得て f を定義できない（どのような場合か考えてみよ）. A, B が閉集合であることも必要である．定義されてしまえば，f が連続であることは定理 3.5.9 より従う.
定理の f は次の性質をもつ.

- $d \geq 0$ だから $f \geq 0$. また分母のほうが $d(x,B)$ を足している分大きいから $f \leq 1$. よって $f : X \to [0,1]$（連続）とみなせる.

- $x \in A$ のとき $d(x,A) = 0$ だから $f(x) = 0$. また $x \in B$ のとき $d(x,B) = 0$ だから $f(x) = 1$.

距離空間 X が正規であることを示そう．距離空間が (T_1) をみたすことは講義で見たから，X が (T_4) をみたすことをいえばよい．任意の $A, B \in \mathscr{A}(X)$ で $A \cap B = \emptyset$ をみたすものに対し，上のような f を取る．$U := [0, \frac{1}{3})$, $V := (\frac{2}{3}, 1]$ はともに $[0,1]$ の開集合である（相対位相の定義を思い出すこと）．f は連続だから，$f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ はともに X の開集合で，上に述べた f の性質の二番目から $A \subset f^{-1}(U)$, $B \subset f^{-1}(V)$. さらに $U \cap V = \emptyset$ であることから $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. よって任意の $A, B \in \mathscr{A}(X)$, $A \cap B = \emptyset$ に対し，A と B を分離する開集合が取れたことになり，距離空間 X は (T_4) をみたすことがわかった.