位相空間論 演習問題 13（2014 年 1 月 10 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}^n$ に通常の Euclid 距離を入れる．次のうち，コンパクトであるものはどれか．
   (1) $D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$　　(2) $\mathrm{Int}D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$
   (3) $\boldsymbol{x}_k := (k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ とおくとき，$A_k := \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$　(4) $A_\infty := \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$
   (5) $S^1 \vee S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$
   (6) $S^1 \vee S^1 \setminus \{(0,0)\}$

2. （問題 4-6-5）コンパクト空間 X 上の連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は最大値と最小値を持つことを，以下の手順で示せ．
   (1) $K := f(X) \subset \mathbb{R}$ は有界閉集合であることを示せ．（ヒント：定理 4.6.2 と定理 3.4.11）
   (2) K は有界だから上限 $M := \sup K$ を持つ．$M \in K$ であることを示せ．（ヒント：定理 4.1.5 より $K = \overline{K}$）
   (3) M は f の最大値であることを示せ．
   (4) 同様に $g := -f$ は最大値を持つ．それを $-m$ とおくとき，m は f の最小値であることを示せ．

3. （定理 4.6.1）X がコンパクトであることは，X が次の**有限交叉性**を持つことと同値であることを示せ：
   閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{A}(X)$ が，任意の自然数 n と任意の $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ に対し $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$ をみたすならば $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

4. $A \subset X$ とし，X から A に導かれる相対位相を $\mathscr{O}(A)$ と書く．A が X のコンパクト集合であることと，$(A, \mathscr{O}(A))$ がコンパクト空間であることは同値であることを示せ．

5. （問題 4-6-2）集合 X に離散位相 $\mathscr{O}_{\mathrm{discrete}} := \{X$ のすべての部分集合$\}$ を入れる．X がコンパクトであることと，X が有限集合であることは同値であることを示せ．（ヒント：X の開被覆 $\{\{x\}\}_{x \in X}$ を考えよ）

6. （問題 4-6-3, 4-6-4）A, B が X のコンパクト集合であるとき，$A \cup B$ もコンパクトであることを示せ．X が Hausdorff ならば，$A \cap B$ もコンパクトであることを示せ．（ヒント：定理 4.6.4）

7. （問題 4-6-6）X をコンパクト空間，$f : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$f^{-1}(0) := \{x \in X \mid f(x) = 0\} \subset X$ はコンパクトであることを示せ．（ヒント：$f^{-1}(0)$ が閉集合であることを示し定理 4.6.3 を使う）

8. (1) （定理 4.6.7, 4.6.8）$X_1, \dots, X_n$ がコンパクトであるとき，$X_1 \times \cdots \times X_n$ もコンパクトであることを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 1)$ に通常の Euclid 距離を入れる．$[a,b] \subset \mathbb{R}$ がコンパクトであることを認めて（裏面参照），$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i\ (\forall i)\} \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトであることを示せ．
   (3) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し，$\overline{U(\boldsymbol{x}; r)} \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトであることを示せ．（ヒント：(2) と定理 4.6.3）

9. （定理 4.6.9）Hausdorff 空間 X がコンパクトでもあるとき，X は正規空間であることを示せ．

10. （定理 4.7.6）X を位相空間とする．X に属さない一点 ∞ を考え，非交和 $X \cup \{\infty\}$（共通部分を持たない和集合）に次の開基 $\mathscr{O}^*$ で位相を定める：$U \subset X \cup \{\infty\}$ が $U \in \mathscr{O}^*$ となるのは，次のいずれかのとき：
    - $U \subset X$ で $U \in \mathscr{O}(X)$ である，または
    - $\infty \in U$ で $K := (X \cup \{\infty\}) \setminus U \subset X$ が X のコンパクトな閉集合である

    (1) $\mathscr{O}^*$ は定理 4.3.5 の条件 (1), (2) をみたすことを示せ．
    (2) $X \cup \{\infty\}$ はコンパクトであることを示せ．$X \cup \{\infty\}$ を X の**一点コンパクト化**とよぶ．
    (3) $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化は n 次元球面 S^n と同相であることを示せ．

（提出の必要はありません）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

位相空間論 レポート問題 13（2014 年 1 月 10 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^2$ 上で Euclid 距離を考える．

(1) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-1 \leq y \leq x+1\}$ を図示せよ．X は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ．（任意の $\boldsymbol{x} = (a,b) \in \mathbb{R}^2 - X$ に対し，$U(\boldsymbol{x};\delta) \subset \mathbb{R}^2 - X \cdots$ (※) となる $\delta > 0$ を一つ求めよ．(※) の証明は省略可）

(2) X はコンパクトでないことを示せ．

(3) (1) と同様に，$Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x-1 \leq y \leq -x+1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．$X \cap Y$ はコンパクトであることを示せ．

（締切：1/24 の 3 限開始まで）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

おまけ：定理 3.4.11 の証明について．以下，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ には通常の Euclid 距離を入れます．
講義では次の事実を証明しませんでした：

定理 3.4.10（の系）．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し，$\overline{U(\boldsymbol{x};r)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leq r\}$ はコンパクトである．

定理 3.4.10（の系）は，今日 (1/10) の問題 8 の手順で証明されますが，その中で次の事実を使います：

定理． $[a,b] \subset \mathbb{R}$ はコンパクトである．

以下，定理の証明を記しておきます．

証明． $\mathscr{U} := \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{O}(\mathbb{R})$ を $[a,b]$ の任意の開被覆とする．$a \leq x \leq b$ に対し，$\mathscr{U}$ は $[a,x]$ の開被覆でもある．

$$I := \{x \in [a,b] \mid \mathscr{U} \text{ は } [a,x] \text{ の有限部分被覆を含む}\}$$

とおく．$\mathscr{U}$ が $[a,b]$ の有限部分被覆を含むことを証明したいのだから，$b \in I$ を示せばよい．

(1) まず $a \in I$ であり，従って $I \neq \emptyset$ である．実際，$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ より，$a \in O_{\lambda_0}$ をみたす $\lambda_0 \in \Lambda$ は必ず存在し，$\{O_{\lambda_0}\}$ が $[a,a] = \{a\}$ の有限部分被覆である．

(2) もし $x \in I$ なら，$a \leq y \leq x$ をみたす任意の y は $y \in I$ をみたす．実際，$[a,x]$ の有限被覆は $[a,y]$ $(\subset [a,x])$ の有限被覆でもある．

(3) $I \subset [a,b]$ は上に有界な集合で b が上界の一つだから，上限 $c := \sup I \leq b$ を持つ．まず $c \in I$ を示そう．上限の性質から，任意の（小さい）$\epsilon > 0$ に対し，$c - \epsilon < x < c$ をみたす $x \in I$ が存在する．よって (2) で述べたことから $c - \epsilon \in I$. 従って $\mathscr{U}$ は $[a, c-\epsilon]$ の有限部分被覆 $\mathscr{U}_\epsilon$ を含む．一方，$c \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ より，$c \in O_{\lambda_1}$ をみたす $\lambda_1 \in \Lambda$ が存在する．c は O_{λ_1} の内点だから，$\epsilon > 0$ が十分小さければ $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset O_{\lambda_1}$. よって $\mathscr{U}$ は $[a, c+(\epsilon/2)]$ の有限部分被覆 $\mathscr{U}_\epsilon \cup \{O_{\lambda_1}\}$ を持つ（もし $O_{\lambda_1} \in \mathscr{U}_\epsilon$ なら，$\mathscr{U}_\epsilon$ が既に $[a, c+(\epsilon/2)]$ の開被覆になっている）．$\mathscr{U}_\epsilon \cup \{O_{\lambda_1}\}$ は $[a,c]$ の有限被覆でもあるから $c \in I$ がわかる．

(4) $c < b$ と仮定しよう．このとき，上の議論の $\epsilon > 0$ を $c + \epsilon < b$ となるように取れる．すると $c + (\epsilon/2) \in I$ がわかり，$c = \sup I$ に反する．よって $c = b$. $c \in I$ だったから $b \in I$. $\square$