## 位相空間論 演習問題 14（2014 年 1 月 24 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$（の部分集合）上では Euclid 距離から定まる位相を考える．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ 内で原点からの距離が 1 の点全体の集合を $S^2$ と書き，**2 次元球面**とよぶ．つまり $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. $S^2$ は $\mathbb{R}^3$ のコンパクト集合であることを示せ.（定理 3.4.11 を使う）

   (2) $S^2$ 上の同値関係 $\sim$ を，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^2$ に対し

   $$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} = \pm \boldsymbol{y}$$

   で定義する．ただし $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対し，$-\boldsymbol{y} = (-y_1, -y_2, -y_3)$. $\sim$ は同値関係であることを確かめよ．つまり，次の (i), (ii), (iii) を示せ．

   $$\text{(i) } \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x} \qquad \text{(ii) } \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \implies \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x} \qquad \text{(iii) } \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z} \implies \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$$

   (3) 商空間 $S^2/\sim$ はコンパクトであることを示せ.（定理 4.6.2 と (1) を使う）

   (4) $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分ベクトル空間全体の集合を $\mathbb{R}P^2$ と書き，**射影平面** (projective plane) とよぶ．つまり $\mathbb{R}P^2 := \{\ell \subset \mathbb{R}^3 \mid \ell \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{の原点を通る直線}\}$. $\mathbb{R}^3$ の原点と $\boldsymbol{x} \in S^2$ を通る直線を $\ell_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}P^2$ とおくとき，$\ell_{\boldsymbol{x}} = \ell_{-\boldsymbol{x}}$ であることを示せ．このことから，写像

   $$c : S^2/\sim\ \to \mathbb{R}P^2, \quad c([\boldsymbol{x}]) := \ell_{\boldsymbol{x}}$$

   が well-defined であることを示せ．さらに $c$ は全単射であることを示せ．

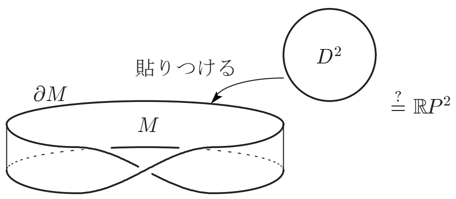
   (5) $\mathbb{R}^3$ から原点を除いた空間 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の同値関係 $\sim'$ を

   $$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{x} \sim' \boldsymbol{y} \iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在して } \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$$

   で定義し，等化位相により商空間を考える．同相 $(\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\})/\sim'\ \approx S^2/\sim$ を示せ.（教科書では $(\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\})/\sim'$ のことを $P(\boldsymbol{R}^3)$ と書いている）

   (6) 同様のことを一般の次元で考えよ．つまり $S^n$ 上の同値関係 $\sim$ を定義し，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体の集合 $\mathbb{R}P^n$ を考え，全単射 $c : S^n/\sim\ \to \mathbb{R}P^n$ を構成せよ．特に $n = 1$ のとき，$\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ を示せ．ただし $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は円周である．

   (7) （やや難，下図参照のこと）四角形 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ 上の同値関係 $\sim''$ を，$\boldsymbol{x} \sim'' \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{\iff} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x} = (0, a)$, $\boldsymbol{y} = (1, 1-a)$ $(0 \leq a \leq 1)$ で定義すると，商空間は **Möbius の帯** $M$ である（向かい合う二辺を「向きを変えるように」貼り合わせたもの）.「境界部分」$\partial M \subset M$ は円周 $S^1$ と同相な部分集合になっている．$f : \partial M \to S^1$ を同相写像とし，$i : S^1 \to D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を包含写像とすると，$\partial M$ に沿って $i \circ f$ で $M$ を $D^2$ に貼りつけた空間 $M \cup_{\partial M} D^2$ を得る．$M \cup_{\partial M} D^2 \approx \mathbb{R}P^2$ を示せ．




**注**. $\mathbb{R}P^n$ を $n$ 次元**実射影空間**とよぶ．$S^n/\sim$ には商位相（等化位相）を入れ，$\mathbb{R}P^n$ には全単射 $c$ が同相になるような位相を入れる．つまり $O \in \mathscr{O}(\mathbb{R}P^n) \iff c^{-1}(O) \in \mathscr{O}(S^n/\sim)$. (3) と同様にして $\mathbb{R}P^n$ はコンパクト空間になる．実は $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff である（定理 4.8.8, 4.8.9）．定理 4.6.9 より，$\mathbb{R}P^n$ は正規でもある．実は $\mathbb{R}P^n$ は第 2 加算公理をみたし，**多様体**の重要な例である．詳しくは「多様体論」で勉強してください．

（以下，今までの復習です）

2. (1) 位相空間 $X$ の開集合族 $\mathscr{O}^* \subset \mathscr{O}(X)$ が開基であることの定義を述べよ．

   (2) 距離空間 $X$ の開集合族 $\mathscr{O}^* := \{U(x;r)\}_{x\in X,\, r>0}$ は $X$ の開基であることを示せ．(定理 4.3.3)

3. (1) 位相空間 $X, Y$ の直積空間 $X \times Y$ の任意の点 $(x,y) \in X \times Y$ と，$(x,y) \in O$ をみたす任意の $O \in \mathscr{O}(X \times Y)$ に対し，$(x,y) \in U \times V \subset O$ をみたす $U \in \mathscr{O}(X)$, $V \in \mathscr{O}(Y)$ が存在することを示せ．(直積空間の開基の定義を思い出すこと)

   (2) $f, g : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とするとき，$f+g : X \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ も連続関数であることを示せ．(ヒント：$a : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $a(x,y) := x+y$ で定義すると $f+g = a\circ(f\times g)$ で，$f\times g$ は定理 4.3.12 (4) より連続だから，あとは $a$ が連続であることを示せばよい)

   (3) $f, g : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とするとき，$fg : X \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$ も連続関数であることを示せ．

4. $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$A := \{(t, 2(t+1)) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le t \le 0\} \cup \{(t, -2(t-1)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le t \le 2\} \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| \le 1\},$$
$$C := \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid (\pi/4) \le t \le (7\pi/4)\}$$

   を図示せよ．$A$ と $C$ は共に弧状連結であることを示せ．また $A$ と $C$ は同相でないことを示せ．(定理 4.4.6)

5. (1) 連結空間 $X$ と全射 $f : X \to Y$ から誘導される等化位相に関し，$Y$ は連結であることを示せ．(定理 4.4.9)

   (2) $S^2$ は弧状連結であることを示せ．また $\mathbb{R}P^2$ は連結であることを示せ．

6. (1) 位相空間 $(X, \mathscr{O}(X))$ の部分集合 $A$ に入る相対位相 $\mathscr{O}(A)$ の定義を述べよ．

   (2) $X$ を Hausdorff 空間とするとき，部分集合 $A \subset X$ は相対位相に関して Hausdorff であることを示せ．

   (3) $S^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$ は Hausdorff であることを示せ．

7. 二点集合 $X := \{a, b\}$ に位相 $\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, \{a\}, X\}$ を入れる．

   (1) $X$ は $\mathrm{T}_1$ 空間でないことを示せ．

   (2) $f : X \to \mathbb{R}$ を任意の連続関数とするとき，$f$ は定数関数，つまり $f(a) = f(b)$ であることを示せ．(ヒント：$f(a) \neq f(b)$ と仮定し，$f(b) \in O$ だが $f(a) \notin O$ となる開集合 $O \subset \mathbb{R}$ の逆像を考えよ)

   **注**．$\mathrm{T}_1$ でない空間では「二点を連続関数で区別できない（しにくい）」ことがある，という例．

8. 任意の集合 $X$ に対し，$\mathscr{A}(X) := \{F \subset X \mid F$ は有限集合$\}$ とおき，$\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, X\} \cup \{O \subset X \mid O^c \in \mathscr{A}(X)\}$ とおくと，$\mathscr{O}(X)$ は $X$ に位相を定めることを示せ．この位相に関し、$X$ はコンパクトであることを示せ．

9. $A := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1,\ r$ は有理数$\}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合か？理由とともに答えよ．

10. $X$ を距離空間とし，一点 $x_0 \in X$ を固定する．$A \subset X$ が有界であることと，ある $r > 0$ に対し $A \subset U(x_0; r)$ であることは同値であることを示せ．(有界性の定義との違いに注意せよ)

---

**注**．教科書 124 頁，コンパクト集合の定義に誤植があるようです．第 13 刷で確認しました．各自，手元の教科書で確認してみてください．正しくは以下の通りだと思います：
$K \subset X$ がコンパクト集合であるとは

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \supset K,\ O_\lambda \in \mathscr{O}(X) \implies \exists O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_s} \in \mathscr{O}(X);\ O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_s} \supset K$$

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html

**位相空間論 レポート問題 14（2014 年 1 月 24 日）**

担当：境 圭一

今日 (1/24) の演習問題 2〜10 のうちから 2 題以上を選んで解け.

※**締切：1/30（木）18:00**, 提出先：研究室 (403) 前のレポートボックス

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html`