2013 年度 位相空間論 中間試験（2013 年 11 月 15 日）

担当：境 圭一

距離空間 (X,d) の点 $a \in X$ の δ 近傍 $U(a;\delta) := \{x \in X \mid d(x,a) < \delta\}$, 位相空間 X の開集合系 $\mathscr{O} = \mathscr{O}(X)$, 閉集合系 $\mathscr{A} = \mathscr{A}(X)$ などの記号は断りなく用いてよい．

1. (1) $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ のように表すことにする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

とおく．d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ．

以下 $n = 1$ とし，$\mathbb{R}$ 上で (1) の距離 $d(x,y) := |x - y|$ を考える．

(2) $A := (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}$ とする．$1 \in A$ は A の内点であることを，内点の定義に従って示せ．

(3) A は $\mathbb{R}$ の開集合であることを，距離空間における開集合の定義に従って示せ．

(4) $0 \in \mathbb{R}$ は A の触点であることを，触点の定義に従って示せ．

(5) $\overline{A}$ を求めよ．

2. $X = \{a, b, c\}$, $Y := \{p, q\}$ とし，それぞれの部分集合族

$$\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}, \quad \mathscr{O}(Y) := \{\emptyset, \{p\}, Y\}$$

を考える．

(1) $\mathscr{O}(Y)$ は開集合系の公理をみたすことを示せ．

以降 X, Y は $\mathscr{O}(X), \mathscr{O}(Y)$ により位相空間とみなす．$\mathscr{O}(X)$ が開集合系の公理をみたすことは認めてよい．

(2) $A := \{a, b\} \subset X$ とする．$A^\circ, \overline{A}$ を求めよ．

(3) 写像 $f : X \to Y$ を

$$f(a) := q, \quad f(b) := p, \quad f(c) := p$$

で定義する．f は連続写像か？理由と共に答えよ．

(4) (3) の写像 f は開写像か？理由と共に答えよ．

(5) (3) の写像 f は閉写像か？理由と共に答えよ．

3. $(X, \mathscr{O}(X))$ を位相空間とし，$A \subset X$ とする．A には X から相対位相 $\mathscr{O}(A)$ を入れる．

(1) 包含写像 $i : A \to X$ は連続であることを示せ．

(2) $(Y, \mathscr{O}(Y))$ を別の位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．f の A への制限 $f|_A : A \to Y$ は連続であることを示せ．

(3) 次の (i), (ii) は同値であることを示せ：

(i) $A \in \mathscr{O}(X)$

(ii) $i : A \to X$ は開写像である

4. $(X, \mathscr{O}(X))$ を位相空間とし，$A \subset X$ とする．

(1) $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ であることを，内点と触点の定義に従って示せ．

(2) $(A - A^\circ)^\circ = \emptyset$ であることを示せ．

(3) $(\overline{A} - A^\circ)^\circ \neq \emptyset$ であるような例を挙げ，それについて $(\overline{A} - A^\circ)^\circ$ を求めよ．

配点：15, 15, 10, 10 (**1**: $3 \times 5 = 15$, **2**: $3 \times 5 = 15$, **3**: $3 + 3 + 4 = 10$, **4**: $2 + 4 + 4 = 10$)