# 位相空間論 中間試験（2013 年 11 月 15 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ とする．
   - $|x_i - y_i| \geq 0$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ だから $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq 0$.
     また $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0$ $(1 \leq \forall i \leq n) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
   - $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ だから $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \sum_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
   - $1 \leq \forall i \leq n$ について $|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$（三角不等式）だから

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

   (2) $1 \in U(1;1) = (0,2) \subset (0,\infty) = A$ だから 1 は $A$ の内点.

   (3) $\forall a \in A$ に対し $a \in U(a;a) = (0,2a) \subset A$ だから $a$ は $A$ の内点．よって $A$ は $\mathbb{R}$ の開集合.

   (4) $\forall \epsilon > 0$ に対し $U(0;\epsilon) \cap A = (0,\epsilon) \neq \emptyset$ だから，0 は $A$ の触点.

   (5) $\overline{A} = [0,\infty)$ を示す．$A \subset \overline{A}$ と (4) より $[0,\infty) \subset \overline{A}$．一方 $x < 0$ とすると $U(x;|x|) = (2x,0)$ だから $U(x;|x|) \cap A = \emptyset$. よって $x < 0$ のとき $x \notin \overline{A}$. 以上から $\overline{A} = [0,\infty)$.

2. (1) (O1) $\emptyset \cap \{p\} = \emptyset \cap Y = \emptyset$, $\{p\} \cap Y = \{p\}$, $\emptyset \cap \{p\} \cap Y = \emptyset$ はいずれも $\mathscr{O}(Y)$ に属する.
   (O2) $\emptyset \cup \{p\} = \{p\}$, $\emptyset \cup Y = Y$, $\{p\} \cup Y = Y$, $\emptyset \cup \{p\} \cup Y = Y$ はいずれも $\mathscr{O}(Y)$ に属する.
   (O3) $\emptyset, Y \in \mathscr{O}(Y)$.

   (2) $A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の開集合だから $A^\circ = \{a\}$．$X$ の閉集合系は $\mathscr{A}(X) = \{X, \{b,c\}, \{a\}, \emptyset\}$ であり，$\overline{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合だから $\overline{A} = X$.

   (3) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{p\}) = \{b,c\}$, $f^{-1}(Y) = X$ はいずれも $\mathscr{O}(X)$ に属するから，$f$ は連続である.

   (4) $\{a\} \in \mathscr{O}(X)$ だが $f(\{a\}) = \{q\} \notin \mathscr{O}(Y)$ だから，$f$ は開写像でない.

   (5) $Y$ の閉集合系は $\mathscr{A}(Y) = \{\emptyset, \{q\}, Y\}$ である．(2) で見たように $\{b,c\} \in \mathscr{A}(X)$ だが $f(\{b,c\}) = \{p\} \notin \mathscr{A}(Y)$ だから，$f$ は閉写像ではない.

3. (1) $\forall O \in \mathscr{O}(X)$ に対し $i^{-1}(O) = \{a \in A \mid i(a) = a \in O\} = O \cap A \in \mathscr{O}(A)$ だから $i$ は連続.

   (2) $f|_A = f \circ i$ であり，$f, i$ とも連続だから $f|_A$ も連続.

   (3) (i) $\Rightarrow$ (ii): $W \in \mathscr{O}(A)$ とすると，$W = O \cap A$ となる $O \in \mathscr{O}(X)$ が存在する．$i(W) = W = O \cap A \subset X$ で，$O \in \mathscr{O}(X)$, $A \in \mathscr{O}(X)$（仮定 (i) より）だから $O \cap A \in \mathscr{O}(X)$, 従って $i(W) \in \mathscr{O}(X)$ となるから $i$ は開写像.
   (ii) $\Rightarrow$ (i): $i$ は開写像で $A \in \mathscr{O}(A)$ だから，$i(A) = A \in \mathscr{O}(X)$.

4. (1) $x \in A^\circ$ とすると，$\exists O \in \mathscr{O}(X)$, $x \in O \subset A$ だから $x \in A$, よって $A^\circ \subset A$ である．$x \in A$ とすると，$x \in O$ となるような $\forall O \in \mathscr{O}(X)$ に対し，$x \in O \cap A$ だから $O \cap A \neq \emptyset$, よって $x \in \overline{A}$, 従って $A \subset \overline{A}$ である.

   (2) $\exists x \in (A - A^\circ)^\circ$ と仮定する．このとき $\exists O \in \mathscr{O}(X)$, $x \in O \subset A - A^\circ$．このとき $O \subset A$ でもあるから $x$ は $A$ の内点だが，一方で $x \in A - A^\circ$ だから $x \notin A^\circ$ となり矛盾する．よって $(A - A^\circ)^\circ = \emptyset$.

   (3) $X := \{a,b\}$, $\mathscr{O}(X) := \{\emptyset, X\}$, $A := \{a\}$ とする．$A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の開集合だから $A^\circ = \emptyset$．一方 $\mathscr{A}(X) = \{\emptyset, X\}$ であり，$\overline{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合だから $\overline{A} = X$．よって $\overline{A} - A^\circ = X - \emptyset = X$ であり，$(\overline{A} - A^\circ)^\circ = X^\circ = X \neq \emptyset$．（他の例，例えば $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ などでも可）