2013 年度 位相空間論 期末試験（2014 年 1 月 31 日）

担当：境 圭一

- 答案用紙は 4 枚あります（A4 両面）．全てに学籍番号と名前を記入してください．
- 大問ごとに指定された用紙に解答してください．裏面使用の場合は，裏面の右上にも名前を書いてください．
- 終了後は No.1〜No.4 ごとに学籍番号順になるよう回収します．速やかな回収にご協力をお願いします．
- 計算用紙 1 枚 (A4) は提出不要です．
- 教科書・ノート等の持ち込みは**不可**です．
- 配点は問題下部に記載されています．
- 試験開始後 30 分以内の退出，30 分経過後の入室は不可とします．
- 終了後に解答例を配布します．下記 URL にも掲載します．
- 4 限は通常の演習は行いませんし，新たなレポート問題も配布しません．試験の簡単な解説を行いますが，聞きたい人のみ来ていただければ結構です．
- 答案は 2/5（水）以降に返却します．研究室に取りに来てください．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/13_gentop/13_gentop.html`

特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$（の部分集合）には通常の Euclid 距離から定まる位相を入れる．
距離空間 X の点 $x \in X$ の δ 近傍を表す記号 $U(x;\delta)$ と，$U(x;\delta) \in \mathscr{O}(X)$ であることは断りなく用いてよい．
連続写像を作りたい場合，適切な写像が定義されていれば，連続性の証明は省いてよいものとする．

1. $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．
   (1) D^2 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを，閉集合の定義に従って示せ．
   (2) D^2 は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト集合であることを示せ．
   (3) D^2 は弧状連結であることを示せ．
   (4) D^2 は Hausdorff であることを，Hausdorff 性の定義に従って示せ．

2. $X := \{a, b, c\}$ を三点からなる集合とし，その部分集合族 $\mathscr{O}^* := \{\{a,b\}, \{c\}\}$ を考える．
   (1) $\mathscr{O}^*$ が生成する位相 $\mathscr{O}(X)$ を求めよ．位相であることの証明は省略してよい．
   (2) 位相空間 $(X, \mathscr{O}(X))$ は連結でないことを示せ．
   (3) 位相空間 $(X, \mathscr{O}(X))$ は T_1 でないことを示せ．

3. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 O, C を

$$O := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad C := \{(x,y) \in O \mid x < 1/\sqrt{2}\}$$

   で定義する．
   (1) O と C を図示せよ.（別々に描くこと）
   (2) O と C は共に弧状連結であることを示せ．
   (3) O と C は同相でないことを示せ．

4. $n \geq 2$ とする．次の位相空間のいずれか一つについて，それが $\mathbb{R}^n$ と同相でないことを証明せよ．
   (1) $D^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}| \leq 1\}$
   (2) $\mathbb{R}^1$
   (3) $\mathbb{R}^n$ に離散位相を入れた空間（区別のため $\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}$ と書く）

   ※二つ以上について解答した場合は全て無効とし，得点を与えない．

配点：20, 15, 10, 5 (**1**: $5 \times 4 = 20$, **2**: $5 \times 3 = 15$, **3**: $3 + 3 + 4 = 10$)