位相空間論 期末試験（2014 年 1 月 31 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D^2$ に対し，$0 < r < |\boldsymbol{x}| - 1$ となる r を取ると $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}; r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D^2$ だから，$\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$ の内点．従って $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合だから，D^2 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合．

   (2) $D^2 \subset U(\mathbf{0}; 2)$ だから D^2 は $\mathbb{R}^2$ の有界集合．(1) と合わせると D^2 は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だからコンパクト．

   (3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D^2$ に対し，$\gamma : [0,1] \to D^2$ を $\gamma(t) := (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ で定義すると γ は連続で，$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$. よって D^2 は弧状連結．

   (4) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D^2$ に対し，$0 < r < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|/2$ となる r を取る．$U := U(\boldsymbol{x}; r)$, $V := U(\boldsymbol{y}; r)$ とおくと $U, V \in \mathscr{O}(D^2)$, $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$, $U \cap V = \emptyset$. よって D^2 は Hausdorff.

2. (1) $\mathscr{O}(X) = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, X\}$.

   (2) $X = \{a,b\} \cup \{c\}$ であり，$\{a,b\}, \{c\} \in \mathscr{O}(X) \setminus \{\emptyset\}$, また $\{a,b\} \cap \{c\} = \emptyset$ だから X は連結でない．

   (3) (1) より，$a \in O$ かつ $b \notin O$ をみたす $O \in \mathscr{O}(X)$ は存在しないから，X は T_1 でない．

3. (1) 図 1 参照のこと．C は $(1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ を含まない．

   (2) 任意の $p = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $q = (\cos\beta, \sin\beta) \in O$ に対し，$\gamma : [0,1] \to O$ を

   $$\gamma(t) := \bigl(\cos((1-t)\alpha + t\beta), \sin((1-t)\alpha + t\beta)\bigr)$$

   とおけば γ は連続で，$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. よって O は弧状連結．

   C についても全く同様：上のような p, q（ただし $\pi/4 < \alpha, \beta < 7\pi/4$ とする）に対し，上と同じ式で連続写像 $\gamma : [0,1] \to C$ を定義でき，$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. よって C は弧状連結．

   (3) 同相写像 $f : O \to C$ が存在したと仮定する．$r := (1,0) \in O$ とすると，$f|_{O \setminus \{r\}} : O \setminus \{r\} \to C \setminus \{f(r)\}$ も同相である．

   $O \setminus \{r\}$ は弧状連結である．実際，任意の $p = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $q = (\cos\beta, \sin\beta) \in O \setminus \{r\}$（ただし $0 < \alpha \leq \beta < 2\pi$ とする）に対し，(2) の γ は $O \setminus \{r\}$ 内で二点 p, q を結ぶ連続な曲線である．

   一方，$f(r) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ $(\pi/4 < \theta_0 < 7\pi/4)$ とすると，$C \setminus \{f(r)\}$ は二つの弧状連結成分

   $$C_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \pi/4 < \theta < \theta_0\}, \quad C_2 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta_0 < \theta < 7\pi/4\}$$

   を持つ．

   これは矛盾である．よって同相写像 $f : O \to C$ は存在しない．

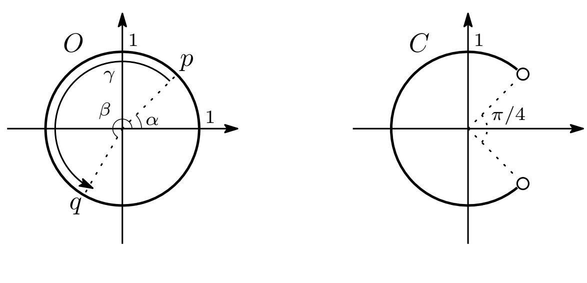

図 1: 問題 3 の O, C

4. (1) D^n は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合だからコンパクト．よって任意の連続写像 $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ に対し，$f(D^n) \subset \mathbb{R}^n$ もコンパクト，よって $f(D^n)$ は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合．特に f は全射にならないから，同相にはなりえない．

(2) もし同相写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ が存在したとすると，$f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^1\setminus\{f(\mathbf{0})\}$ も同相．

$\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ は弧状連結である．実際，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ について，$\gamma(t) := (1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$ が $\gamma(t)\neq\mathbf{0}$ $(0\le t\le 1)$ をみたすなら，この γ が $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 内で $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ連続な曲線を与える．もし $\gamma(t)=\mathbf{0}$ となる $0<t<1$ が存在するなら，$n\ge 2$ より $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を通る直線上にない点 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在するから

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} (1-2t)\boldsymbol{x}+2t\boldsymbol{z} & 0\le t\le 1/2, \\ (2-2t)\boldsymbol{z}+(2t-1)\boldsymbol{y} & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

とおけば，$\tilde{\gamma}$ が $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 内で $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ連続な曲線である．よって $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ は連結でもある．

一方，$\mathbb{R}^1\setminus\{f(\mathbf{0})\} = (-\infty, f(\mathbf{0}))\cup(f(\mathbf{0}),\infty)$ より $\mathbb{R}^1\setminus\{f(\mathbf{0})\}$ は連結でない．

これは矛盾である．

(3) $\mathbb{R}^n$ は弧状連結である．実際，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し，(2) の γ がこれらを結ぶ連続な曲線である．よって $\mathbb{R}^n$ は連結でもある．

一方 $\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}} = \{\mathbf{0}\}\cup(\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}\setminus\{\mathbf{0}\})$ と書け，$\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}$ の部分空間 $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}\setminus\{\mathbf{0}\}$ はともに空でない開集合だから，$\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}$ は連結ではない．

よって $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n_{\mathrm{d}}$ は同相にはなり得ない．