幾何入門 演習問題 1（2014 年 4 月 11 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ を計算せよ．

   (2) (1) の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ に対し，$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ であることを示せ．

2. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

   (1) $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$. また，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が**一次従属**

   (2) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=0$, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$

   (3) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

   (4) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$（ヒント：(3) を使う）

   (5) $\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$

   (6) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$（ヒント：(5) を使う）

   (7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\big(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\big)\cdot\boldsymbol{a}$（ヒント：(6) を使う）

3. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の**一次独立**なベクトルとする．これらを横に並べて得られる 2×2 行列を $A:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $|\det A|$ に等しいことを示せ．$\det A>0$ になるときと $\det A<0$ になるときの違いは何か？

4. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを，以下の手順で示せ（絵を描きながら考えよ)．

   (1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$（ただし $a_1,b_2>0$, $c_3\neq 0$ とする）の形のベクトルを考える．

   $$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\text{ が右手系をなす} \iff c_3>0$$

   を，絵を描いて確かめよ．

   (2) $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ が右手系をなすことと，これらを一斉に回転させて (1) の形の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ $(a_1>0,\ b_2>0,\ c_3>0)$ に重ねられることは同値であることがわかる．一方，「回転させる」とは，$\det P=1$ であるような直交行列 P を掛けることである．以上のことから次を示せ：

   $$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\text{ が右手系をなす} \iff \det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})>0$$

   (3) 問題 2. (5) で $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ とおくことにより，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ が右手系をなすことを示せ．

5. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ に対し，**三角不等式**

   $$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$$

   を証明せよ．（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式より $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$ であることを使う）

6. 講義で証明を省略した補題 1, 3, 5 を証明せよ．

（提出の必要はありません）

注意．深谷先生の教科書では，ベクトルの長さを $||\boldsymbol{u}||$ と表しています．この講義では $|\boldsymbol{u}|$ と書いています．どちらを使っても構いません．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2014 年 4 月 11 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

(i) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ （ヒント：4/11 の問題 2. (7) に (3) を代入する）

(ii) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$ （ヒント：(i) で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}$ とおき，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ を使う）

（4/18 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html