幾何入門 演習問題 2（2014 年 4 月 18 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 二変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$f(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

   (1) f は原点 $\boldsymbol{0}$ において連続であることを示せ．（ヒント：**極座標** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を使う）

   (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{0})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{0})$ が存在することを示し，その値を求めよ．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は $\boldsymbol{0}$ において連続か？

   (3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{v}| = 1$ とする．点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を定義通り計算せよ．

   (4) (3) の方向微分の値が最大になるときの $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

   (5) $\mathrm{grad}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算し (4) と比較せよ．

2. 次の二変数関数 $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続になるような定数 a, b は存在するか？存在するならその値を求め，存在しないならそのことを証明せよ．

$$g(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, \\ a & \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \end{cases} \qquad h(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, \\ b & \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

3. 次のベクトル場を図示せよ．ただし (3), (4) では原点での値は考えない．

   (1) $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

   (3) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$（ヒント：$|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})|$ の値は？）

   (4) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$（ヒント：原点近くでの $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})|$ の値は？原点から遠いところでは？）

4. $f(\boldsymbol{u}) = x^2 - y^2$ とおく．

   (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおく．f を r, θ を使って表せ．

   (2) θ を一つ固定する．$z = f(r, \theta)$ のグラフを rz 平面に描け．（θ で場合分けせよ）

   (3) (2) で描いたグラフを全ての θ について考えることにより，$z = f(\boldsymbol{u})$ のグラフを完成させよ．

   (4) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めよ．

5. 次の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，$z = f(\boldsymbol{u})$ のグラフを描け．また $\mathrm{grad}(f)$ を図示し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ．

   (1) $f(\boldsymbol{u}) = xy$

   (2) $f(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^2}$（ただし $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とする）

   (3) $f(\boldsymbol{u}) = \cos x \cos y$（ヒント：定数 k に対し，平面 $y = k$ で切った切り口を考える．k で場合分けせよ）

   (4) $f(\boldsymbol{u}) = x^2y$（ヒント：前問と同様．$k > 0$, $k = 0$, $k < 0$ で場合分けする）

   (5) $f(\boldsymbol{u}) = x^3 + yx$（ヒント：前問と同様）

6. (1) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ となる $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を求めよ．

   (2) $\mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ となる $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在するか？

（提出の必要はありません）

幾何入門 レポート問題 2（2014 年 4 月 18 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．$f(\boldsymbol{u}) = x^3 + 3x^2y - y^3 + 9x$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ．

（4/25 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html