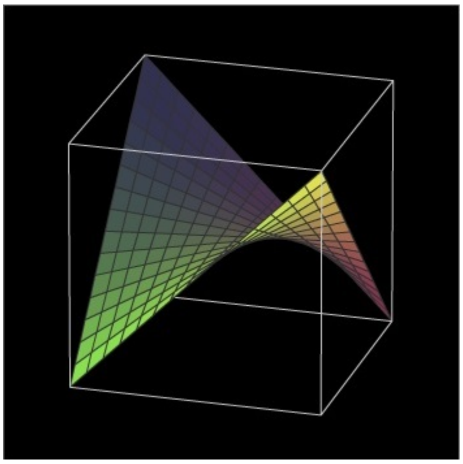
幾何入門 演習問題 3（2014 年 4 月 25 日）

担当：境 圭一

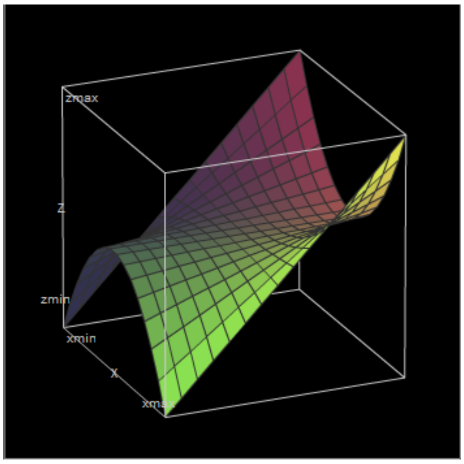
特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 次の曲線 $\boldsymbol{l}$ が定める道 $L \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．
   (1) $\boldsymbol{l} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$（ただし a, b は定数で $0 < a \le b$ とする）
   (2) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix}$
   (3) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$
   (4) $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$（ヒント：$t = 0$ の近くでの挙動に注意せよ）
2. (1) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}$ と前問 (1) の $\boldsymbol{l}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ 1 - x \end{pmatrix}$ と前問 (2) の $\boldsymbol{l}$（ただし $-1 \le t \le 1$ とする）に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
3. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう．$\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\}$ である．
   (1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ を考える．地球の半径を r とし，高さ h までの打ち上げの軌道として，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ で定まる線分 $\boldsymbol{l} : [r, r + h] \to \mathbb{R}^2$ を考える．線積分 $-\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$（打ち上げに要する仕事）を求めよ．
   (2) $\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ で定まる曲線 $\boldsymbol{m} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ に対し，線積分 $-\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{m}$（高さ $R - r$ の周回軌道を一周するのに要する仕事）を求めよ．
   (3) (1) の線積分の $h \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ．
4. (1) 曲線 $\boldsymbol{l} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$ が定める道 L を図示せよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) 変数変換 $h : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $h(\theta) := -\cos\theta$ は $h' > 0$ をみたすことを示せ．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおき，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を計算し (1) と比較せよ．
5. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を微分可能な二つの二変数関数，$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能な一変数関数，$a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．新たな二変数関数 $af + bg, fg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と，合成関数 $\varphi \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を
$$(af + bg)(\boldsymbol{u}) := af(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{u}), \quad (fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{u}), \quad (\varphi \circ f)(\boldsymbol{u}) := \varphi(f(\boldsymbol{u}))$$
   で定める．次のことを示せ：
$$\mathrm{grad}(af + bg) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g), \quad \mathrm{grad}(fg)(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}),$$
$$\mathrm{grad}(\varphi \circ f)(\boldsymbol{u}) = \varphi'(f(\boldsymbol{u}))\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$$
6. $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ を考える．どんな変数変換 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（全単射），$h' > 0$ に対しても，$h(s_0) = 0$ となる s_0 に対し $\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds}(s_0) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．曲線 $\boldsymbol{l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ 上の点 $\boldsymbol{l}(t_0)$ において $\boldsymbol{l}$ に接する直線は $\boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{l}(t_0) + (t - t_0)\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t_0)$ と表せることを示せ．$\boldsymbol{m}$ の第 2 成分と，f の $t = t_0$ における Taylor 展開を比較せよ．

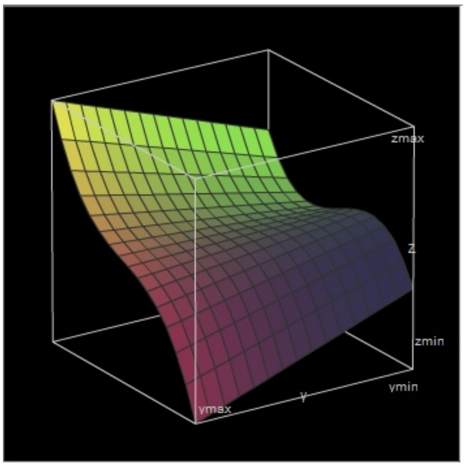
（提出の必要はありません）



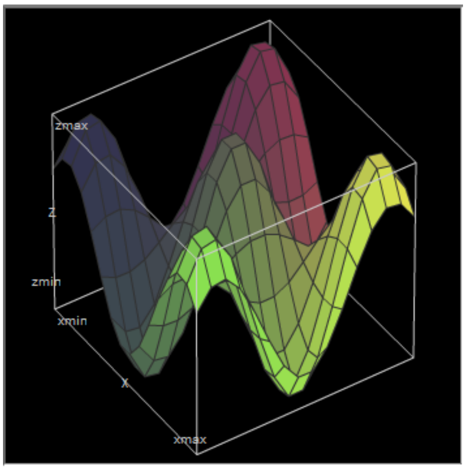
$z = xy$



$z = x^2 y$



$z = x^3 - xy$



$z = \cos x \cos y \ (-\pi \leq x, y \leq \pi)$

参考：3D Function Grapher, `http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/graph3d/`

幾何入門 レポート問題 3（2014 年 4 月 25 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする． $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}$ と曲線 $\boldsymbol{l}_T(t) := \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le T)$ に対し， $\displaystyle\lim_{T \to +\infty} \int_{\boldsymbol{l}_T} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_T$ を求めよ．

（5/9 の 3 限開始時までに提出してください）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/14_geometry/14_geometry.html`